Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2001-3 Cálculo en Varias Variables
31 de Octubre de 2018

Auxiliar #5: Plano Tangente, Regla de la Cadena y Derivadas de Orden Superior

Profesor: David Salas.
Auxiliar: Matías Romero.

P1. Sean $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables tales que

$$g(x, y) = xy \cdot f\left(\frac{x + y}{xy}\right).$$

Demuestre que estas funciones cumplen la ecuación

$$x^2 \frac{\partial g}{\partial x} - y^2 \frac{\partial g}{\partial y} = H(x, y) g(x, y),$$

encontrando explícitamente una expresión para $H(x, y)$.

P2. Considere la superficie definida por la ecuación $\ln(z) + (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$.

(a) Defina $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que el grafo de f coincida con la superficie antes mencionada.

(b) Determine la ecuación del plano tangente a la superficie en cada punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Encuentre todos los puntos en que el plano tangente es paralelo al plano $z = 0$.

(c) Calcule las derivadas parciales de segundo orden de f y justifique si f es de clase $\mathcal{C}^2$.

P3. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Determine las derivadas parciales en cada punto de $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcule el valor de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$. ¿Qué sucedió?