Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2001-3 Cálculo en Varias Variables
10 de Octubre de 2018

Auxiliar Extra C1

Profesor: David Salas.
Auxiliar: Matías Romero.

P1. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones nulas en $\mathbb{R}$. Estudie la convergencia de la sucesión en $\mathbb{R}^2$ definida por:

$$x_n = \left(\left(\frac{7n+1}{7n}\right)^n e^{7+a_nb_n}, \frac{\operatorname{sen}(a_n)^2}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}} \right)$$

Demostración: Analizando por componentes:

$$x_n^1 = \left(\frac{7n+1}{7n}\right)^n e^{7+a_nb_n} = \left(1+\frac{1}{7n}\right)^n e^{7+a_nb_n} = \underbrace{\left(\left(1+\frac{1}{7n}\right)^{7n}\right)^{\frac{1}{7}}}_{\to e} \underbrace{e^{7+a_nb_n}}_{\to e^7} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{7+\frac{1}{7}}$$

Para la segunda componente probaremos que el límite es 0.

$$|x_n^2 - 0| = \frac{|\operatorname{sen}(a_n)|^2}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}} \leq \underbrace{|\operatorname{sen}(a_n)|}_{\to 0} \underbrace{\frac{|\operatorname{sen}(a_n)|}{|a_n|}}_{\to 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Luego, $x_n \to (e^{\frac{50}{7}}, 0)$.

P2. Consideremos $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ el espacio de las matrices cuadradas de $n \times n$. Definimos

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{\mathcal{M}} &: \mathcal{M} \to \mathbb{R} \\ A &\mapsto \max_{j=1,\dots,n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \end{aligned}$$

(a) Muestre que $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ es una norma.

(b) Muestre que para toda matriz $A \in \mathcal{M}$ y para todo vector $x \in \mathbb{R}^n$ se cumple que:

$$\|Ax\|_1 \leq \|A\|_{\mathcal{M}} \|x\|_1$$

Demostración: Claramente $\|A\| \geq 0$ para cualquier $A \in \mathcal{M}$.

- $\|A\| = 0 \iff A = 0$ la matriz nula ($a_{ij} = 0, \forall\, i,\, j$).
  ($\Longleftarrow$)

  $$\|0\| = \max_{j=1,\dots,n} \left(\sum_{i=1}^n 0 \right) = \max_{j=1,\dots,n} (0) = 0$$

  ($\Longrightarrow$) Sea A tal que $\|A\| = 0$. Entonces,

  $$\max_{j=1,\dots,n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) = 0$$

  Como todos los elementos dentro del máximo son mayores o iguales a cero (independiente del j escogido), lo anterior implica que cada elemento del máximo es cero. Esto es, para todo $j = 1, \dots, n$:

  $$\sum_{i=1}^n |a_{ij}| = 0$$

lo cual corresponde a la norma 1 de la columna j-ésima, y por identificación del cero de esta norma, cada elemento de la columna debe ser 0 (alternativamente, la suma de números positivos es cero solo si todos los elementos son cero, concluyendo por la identificación del cero del valor absoluto). Luego,

$$a_{ij} = 0, \forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

es decir, A es la matriz nula.

- Sea $A \in \mathcal{M}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Notemos que

$$\|\lambda A\| = \max_{j=1,\ldots,n} \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda a_{ij}| \right) = \max_{j=1,\ldots,n} \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda||a_{ij}| \right) = \max_{j=1,\ldots,n} |\lambda| \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) = |\lambda| \max_{j=1,\ldots,n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) = |\lambda| \|A\|$$

donde la penúltima igualdad se tiene ya que la constante que se saca de dentro del máximo es positiva.

- Sean $A, B \in \mathcal{M}$. Trabajamos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \|A + B\| &= \max_{j=1,\ldots,n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij} + b_{ij}| \right) \leq \max_{j=1,\ldots,n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| + |b_{ij}| \right) = \max_{j=1,\ldots,n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| + \sum_{i=1}^{n} |b_{ij}| \right) \\ &\leq \max_{j=1,\ldots,n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) + \max_{j=1,\ldots,n} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_{ij}| \right) = \|A\| + \|B\|. \end{aligned}$$

donde podemos separar los máximos con desigualdad, pues

$$\max_{j=1,\ldots,n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| + \sum_{i=1}^{n} |b_{ij}| \right) \leq \max_{j=1,\ldots,n} \left(\max_{j=1,\ldots,n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) + \sum_{i=1}^{n} |b_{ij}| \right) = \max_{j=1,\ldots,n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) + \max_{j=1,\ldots,n} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_{ij}| \right)$$

y $\max_{j=1,\ldots,n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right)$ es una constante que está sumada a cada elemento del máximo, por lo que sale de él sin problema.

Finalmente, concluimos que $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathcal{M}$.

(b): Sea $A \in \mathcal{M}$, $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $Ax \in \mathbb{R}^n$ y tiene sentido calcularle norma 1:

$$\begin{aligned} \|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij} x_j| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}||x_j| \\ &= \sum_{j=1}^{n} |x_j| \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \max_{j=1,\ldots,n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \|A\| = \|A\| \|x\|_1 \end{aligned}$$

P3. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{\exp\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) - 1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} & \text{si} \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 1 & \text{si} \quad (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

(a) Pruebe que f es continua en todo $\mathbb{R}^3$.

(b) Pruebe que el conjunto $A = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) \leq 2018 \,\}$ es compacto.

Demostración: **(a):** f es continua fuera del origen por álgebra y composición de funciones continuas. Para que sea continua en $(0, 0, 0)$, se debe cumplir que

$$\lim_{(x,y,z) \to (0,0,0)} f(x, y, z) = 1.$$

En efecto, recordando que si $(x, y, z) \to (0, 0, 0)$, entonces $\|(x, y, z)\| \to 0$,

$$\lim_{(x,y,z) \to (0,0,0)} \frac{\exp\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) - 1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \lim_{\|(x,y,z)\|_2 \to 0} \frac{\exp(\|(x, y, z)\|_2) - 1}{\|(x, y, z)\|_2} = \lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

donde el último límite es conocido (se desprende utiliza la regla de l'Hopital o con la definición de derivada).

(b): Basta probar que $A \subseteq \mathbb{R}^3$ es cerrado y acotado.

Es cerrado, pues podemos reescribir

$$A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) \in (-\infty, 2018] \} = f^{-1}((-\infty, 2018])$$

es decir, A es preimagen del conjunto cerrado $(-\infty, 2018] \subseteq \mathbb{R}$ a través de una función continua.

Veamos que es acotado, esto es,

$$\exists\, M > 0 \text{ tal que } \|(x,y,z)\|_2 \leq M, \forall\, (x,y,z) \in A$$

Razonando por contradicción, si A no es acotado tenemos la negación de lo anterior:

$$\forall\, M > 0,\ \exists\, (x_M, y_M, z_M) \in A : \|(x,y,z)\|_2 > M.$$

En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos elegir $(x_n, y_n, z_n) \in A$ tal que $\|(x_n, y_n, z_n)\|_2 > n$, formando así una sucesión de elementos de A que está siempre por sobre la sucesión n que se va a infinito y concluyendo que

$$\|(x_n, y_n, z_n)\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

Notemos además que la función a través de esta sucesión también se va a infinito, pues

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\exp(\|(x_n, y_n, z_n)\|_2) - 1}{\|(x_n, y_n, z_n)\|_2} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^t - 1}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^t}{1} = \infty$$

lo cual se puede escribir por definición de límite a infinito:

$$\forall\, M > 0,\ \exists n \in \mathbb{N} : f(x_n, y_n, z_n) > M.$$

En particular, tomando $M = 2018$ debería existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_N, y_N, z_N) > 2018$, pero la sucesión estaba formada por elementos de A, es decir $f(x_N, y_N, z_N) \leq 2018$, llegando a una contradicción. Luego, concluimos que necesariamente A es acotado y, como ya sabemos que es cerrado, A es compacto.

P4. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = (1 - x^2 - y^2) \exp(5x^2 - y^2 + \cos(3x + y)).$$

Sea $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \}$. Demuestre que existe un punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in D$ tal que

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x,y),\ \ \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Demostración: En primer lugar, notamos que como la función exponencial es siempre positiva, el signo de f está determinado por la expresión $(1 - (x^2 + y^2))$, que cumple:

- $(1 - (x^2 + y^2)) > 0$ cuando $x^2 + y^2 < 1$, es decir, $(x,y) \in D$.
- $(1 - (x^2 + y^2)) \leq 0$ cuando $x^2 + y^2 \geq 1$, es decir, $(x,y) \in D^c$.

Entonces, para $(x_1, y_1) \in D$, $(x_2, y_2) \in D^c$, obtenemos que

$$f(x_1, y_1) > 0 \geq f(x_2, y_2) \tag{$*$}$$

es decir, solo los elementos de D son candidatos a ser máximos.

Ahora vemos que D es acotado, pues es la bola unitaria abierta, esto es, $\|(x,y)\|_2 = x^2 + y^2 < 1$, $\forall\, (x,y) \in D$, pero no es cerrado, por lo que no podemos concluir que es compacto. Sin embargo, si consideramos la cerradura $\mathrm{Adh}(D) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \}$, este conjunto es cerrado y acotado por la misma razón anterior, entonces es compacto, y la función alcanza su máximo en ese conjunto, es decir, existe un $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{Adh}(D)$ tal que:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x,y), \forall\, (x,y) \in \mathrm{Adh}(D)$$

Pero en realidad $(\bar{x}, \bar{y}) \in D$, pues si no fuera así, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{Adh}(D) \setminus D = \mathrm{Adh}(D) \cap D^c$, es decir $(\bar{x}, \bar{y}) \in D^c$, y como vimos anteriormente el máximo no puede estar en D^c. Luego, $(\bar{x}, \bar{y}) \in D$ y usando (*) también tenemos que

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x,y), \forall\, (x,y) \in D^c \Longrightarrow f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x,y), \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2$$