Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2001-3 Cálculo en Varias Variables
10 de Octubre de 2018

Auxiliar Extra C1

Profesor: David Salas.
Auxiliar: Matías Romero.

P1. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones nulas en $\mathbb{R}$. Estudie la convergencia de la sucesión en $\mathbb{R}^2$ definida por:

$$x_n = \left(\left(\frac{7n+1}{7n} \right)^n e^{7+a_n b_n}, \frac{\operatorname{sen}(a_n)^2}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \right)$$

P2. Consideremos $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ el espacio de las matrices cuadradas de $n \times n$. Definimos

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto \max_{j=1,\ldots,n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) \end{aligned}$$

(a) Muestre que $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ es una norma.

(b) Muestre que para toda matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ y para todo vector $x \in \mathbb{R}^n$ se cumple que:

$$\|Ax\|_1 \leq \|A\|_{\mathcal{M}} \|x\|_1$$

P3. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{\exp\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) - 1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \text{si} \quad (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

(a) Pruebe que f es continua en todo $\mathbb{R}^3$.

(b) Pruebe que el conjunto $A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) \leq 2018 \}$ es compacto.

P4. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = (1 - x^2 - y^2) \exp\left(5x^2 - y^2 + \cos(3x+y)\right).$$

Sea $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \}$. Demuestre que existe un punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in D$ tal que

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x,y), \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$