Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2001-3 Cálculo en Varias Variables
10 de Octubre de 2018

Pauta Auxiliar #3

Profesor: David Salas.
Auxiliar: Matías Romero.

P1. Determine si los siguientes límites existen o no. En caso de existir, calcúlelos y justifique.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6+x^2+3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4+z^2}$

Demostración:

(a): En primer lugar es importante verificar que $(0,0)$ es punto de acumulación del dominio de la función (para que tenga sentido calcular el límite), lo cual es cierto, pues el dominio de la función es $\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$. Entonces, vamos a calcular el límite cuando $(x,y)\to(0,0)$ con $(x,y)\neq(0,0)$

Primer, vamos a reescribir la función separándola en términos más sencillos, para luego estudiar el límite cuando $(x,y)\to(0,0)$ en cada uno de ellos y concluir en virtud de las propiedades de álgebra de límites.

$$\frac{x^6+x^2+3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \underbrace{\frac{x^6}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\text{(I)}} + \underbrace{\frac{2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\text{(II)}} + \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\to 0}$$

Intuitivamente, como el orden en el numerador en (I) y (II) es mayor que en el denominador, nuestro candidato a limite en ambos casos es 0. Probemos esto por sándwich:

$$0 \leq |(\mathrm{I})-0| = \frac{x^6}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x||x|^5}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{(\sqrt{x^2+y^2})|x|^5}{\sqrt{x^2+y^2}} = |x|^5 \to 0 \tag{1}$$

$$0 \leq |(\mathrm{II})-0| = \frac{2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{2(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2\sqrt{x^2+y^2} \to 0 \tag{2}$$

donde utilizamos que $y^2 \leq y^2+x^2$, pues ambos términos son positivos, y con esto $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$ y podemos simplificar las expresiones sin problema, ya que como $(x,y)\neq(0,0)$, tenemos que $x^2+y^2>0$.

Finalmente, como los tres sumandos convergen a 0, el límite pedido es 0.

(b): En este ejercicio veremos la caracterización de límite (o continuidad) con $\varepsilon-\delta$, la cual se escribe en este caso, llamando f la función a la que queremos calcular límite y $L\in\mathbb{R}$ nuestro candidato :

$$\forall\,\varepsilon>0, \exists\,\delta>0 : \forall\,(x,y)\in \mathrm{dom}(f) \text{ con } \|(x,y)-(0,0)\|<\delta \Longrightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon$$

donde la norma utilizada $\|\cdot\|$ se puede elegir, ya que son todas equivalentes.

La intuición nos debería decir, por el mismo argumento que antes, que el 0 sería buen candidato. Notemos que

$$|f(x,y)-0| = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = \frac{x^4}{x^2+y^2} + \frac{y^4}{x^2+y^2} = x^2 \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1} + y^2 \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1} \leq x^2+y^2 = (\|(x,y)\|_2)^2.$$

Teniendo esta cota es fácil concluir que para cualquier $\varepsilon > 0$ podemos escoger $\delta = \sqrt{\varepsilon} > 0$, con lo cual, si $\|(x,y)\|_2 < \sqrt{\varepsilon}$, tendremos que $|f(x,y)| \leq (\|(x,y)\|_2)^2 < \delta^2 = \varepsilon$.

(c): Veamos que hay dos trayectorias por las que me puedo acercar a $(0,0,0)$ pero que la función a través de esas trayectorias converge a límites distintos, concluyendo así que el límite no existe.

Trayectoria recta: Imponiendo $x = y = z$, la función resulta:

$$\frac{xx^2}{x^2+x^4+x^2} = \frac{x^3}{2x^2+x^4} = \frac{x}{2+x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0,$$

pues el numerador converge a 0 y el denominador a 2.

Trayectoria parabólica: Imponiendo $x = y^2, z = 0$, la función resulta:

$$\frac{y^2y^2}{(y^2)^2+y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} \frac{1}{2}$$

P2. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^\alpha}{x^2-xy+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Pruebe que la función es continua cuando $\alpha > 1$.

Demostración: La función es continua fuera del origen por álgebra y composición de funciones continuas. Veamos que si $\alpha > 1$, el límite de la función acercándose a $(0,0)$ es justamente 0. Para ello usemos un cambio de variables a coordenadas polares: $x = \rho\cos(\theta)$, $y = \rho\,\mathrm{sen}(\theta)$ con $\rho \in [0,\infty)$, $\theta \in [0,2\pi)$:

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{|xy|^\alpha}{|x^2-xy+y^2|} &\iff 0 \leq \frac{|\rho^2\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)|^\alpha}{|\rho^2\cos^2(\theta) - \rho^2\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) + \rho^2\,\mathrm{sen}^2(\theta)|} \\ &\iff 0 \leq \frac{\rho^{2\alpha}|\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)|^\alpha}{\rho^2|1-\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)|} \\ &\iff 0 \leq \frac{\rho^{2\alpha}|\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)|^\alpha}{\rho^2|1-\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)|} \leq \frac{\rho^{2\alpha-2}}{|1-\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)|} \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0 \end{aligned}$$

donde lo último viene del hecho que $\alpha > 1$. Además, cabe destacar que el denominador del no se anula para ningún valor de θ, pues

$$1-\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) = 0 \iff 2 = 2\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) \iff 2 = \mathrm{sen}(2\theta)$$

lo cual no puede suceder pues la función seno está acotada por 1.

P3. Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función continua tal que

- $f(0) > 0$
- $f(x) \leq 0$ para todo x con $\|x\| > 1$.

Demuestre que existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$ tal que

$$f(\bar{x}) \geq f(x), \ \ \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Demostración: Queremos buscar un máximo global, pero solo tenemos herramientas para encontrar el máximo de una función continua dentro de un conjunto compacto. Sin embargo, las hipótesis extra sobre la función f nos dan condiciones suficientes para extender el máximo a todo el espacio.

En efecto, consideremos la bola unitaria cerrada $\bar{B}(0,1)$, que es cerrada y acotada por definición, luego es compacta y por tanto existe $\bar{x} \in B(0,1)$ tal que

$$f(\bar{x}) \geq f(x) \ \ \forall x \in \bar{B}(0,1),$$

pero en particular, como $0 \in B(\bar{0},1)$, tenemos que

$$f(\bar{x}) \geq f(0) > 0 \geq f(x) \ \ \forall x \notin \bar{B}(0,1)$$

con lo cual concluimos que

$$f(\bar{x}) \geq f(x), \ \ \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

P4. Considere $D_1 := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4 \}$ y $D_2 := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 < x^2+y^2 \leq 9 \}$. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ se define

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2-\lambda & \text{si} \quad (x,y) \in D_1 \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) \in D_2 \end{cases}$$

(a) Encuentre λ tal que f sea continua en $D_1 \cup D_2$. De ahora en adelante, se considera dicho valor de λ.

(b) Pruebe que el grafo de f:

$$\mathrm{Gr}(f) := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y),\ (x,y) \in D_1 \cup D_2 \}$$

es cerrado y acotado

(c) Pruebe que, dado cualquier $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$, existe un punto en el grafo de f que minimiza la distancia a (x_0,y_0,z_0).

Demostración:

(a): Notamos primero que f es continua en D_1 y D_2 por separado. Para que sea continua en $D_1 \cup D_2$ hay que revisar los puntos (de acumulación) a los que se puede aproximar tanto desde D_1 como desde D_2 y verificar que acercándose por cualquier trayectoria (sucesión) el límite de la función sea consistente (extendiendo la idea de los límites laterales en $\mathbb{R}$). En este caso, hay que probar $\forall (x,y)$ tal que $x^2+y^2 = 4$ que para cualquier sucesión $(x_n,y_n) \subseteq D_1 \cup D_2$ convergente a (x,y) se tiene

$$\lim_{(x_n,y_n)\to(x,y)} f(x_n,y_n) = f(x,y) = x^2+y^2-\lambda = 4-\lambda$$

donde lo último se obtiene de que $(x,y) \in \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4 \} \subseteq D_1$.

En efecto, si $(x_n,y_n) \subseteq D_1 \cup D_2$, consideremos $N_1 := \{ n \in \mathbb{N} : (x_n,y_n) \in D_1 \}$ y $N_2 := \{ n \in \mathbb{N} : (x_n,y_n) \in D_2 \}$. Afirmamos que al menos uno de estos dos conjuntos tiene infinitos (numerables) puntos, pues la unión de ellos es $\mathbb{N}$.

Si $|N_1| = |\mathbb{N}|$, $(x_n,y_n)_{n\in N_1}$ es una subsucesión de $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y por tanto convergente a (x,y). En este caso, como f es continua en D_1, obtenemos directamente que

$$f(x_n,y_n)_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x,y)$$

Si $|N_2| = |\mathbb{N}|$, $(x_n,y_n)_{n\in N_2}$ también es una subsucesión de $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y por tanto convergente a (x,y), pero en este caso, para cada $n \in N_2$,

$$f(x_n, y_n)_n = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Como toda subsucesión de una sucesión convergente es convergente al mismo límite, concluimos que necesariamente $\lambda = 4$.

(b): Cerrado: Sea $(x_n, y_n, z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Gr}(f)$ convergente a (x_n, y_n, z_n). Veamos que necesariamente $(x, y, z) \in \mathrm{Gr}(f)$.

En efecto, por la definición de $\mathrm{Gr}(f)$, $(x_n, y_n) \in D_1 \cup D_2, \forall\, n \in \mathbb{N}$, y como $D_1 \cup D_2 = \bar{B}_{\|\cdot\|_2}(0, 3)$ que es cerrado, entonces el límite $(x, y) \in \mathrm{Adh}(D_1 \cup D_2) = D_1 \cup D_2$.

Por otro lado, por la definición de $\mathrm{Gr}(f)$, $z_n = f(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x, y)$, pues la función es continua en $D_1 \cup D_2$.

Acotado: Ya vimos que $D_1 \cup D_2 = \bar{B}_{\|\cdot\|_2}(0, 3) \subseteq \mathbb{R}^2$ que es cerrado y acotado, es decir, es compacto. Entonces, como f es continua en ese conjunto, $|f|$ también lo es (por composición de continuas), y por tanto alcanza su máximo en algún $(\bar{x}, \bar{y}) \in D_1 \cup D_2$. Luego, para cada $(x, y, z) \in \mathrm{Gr}(f)$,

$$\|(x, y, z)\|_\infty = \text{máx}\{|x|, |y|, |z|\} \le \text{máx}\{3, 3, |f(x, y)| \le \underbrace{\text{máx}\{3, 3, |f(\bar{x}, \bar{y})|\}}_{C\in\mathbb{R}}$$

Con lo cual concluimos que $\mathrm{Gr}(f) \subseteq \bar{B}_{\|\infty\|}(0, C) \subseteq \mathbb{R}^3$ es acotado.

(c): Sea $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, definimos la función distancia del grafo al punto como $d : \mathrm{Gr}(f) :\to \mathbb{R}$ como $d(x, y, z) = \|(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)\|_2$. que es continua pues la norma lo es (y restar una constante también). Luego, como probamos en **(b)** que el grafo es compacto, existe un punto que minimiza la función en $\mathrm{Gr}(f)$.