Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2001-3 Cálculo en Varias Variables
10 de Octubre de 2018

Auxiliar #3: Límites, Continuidad y Compacidad

Profesor: David Salas.
Auxiliar: Matías Romero.

P1. Determine si los siguientes límites existen o no. En caso de existir, calcúlelos y justifique.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6+x^2+3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4+z^2}$

P2. Considere la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{|xy|^\alpha}{x^2-xy+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Determine los valores de $\alpha\in\mathbb{R}$ para los cuales la función es continua.

P3. Sea $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ una función continua tal que

- $f(0)>0$
- $f(x)\leq 0$ para todo x con $\|x\|>1$.

Demuestre que existe $\bar{x}\in\mathbb{R}^d$ tal que

$$f(\bar{x})\geq f(x),\ \ \forall\, x\in\mathbb{R}^d.$$

P4. Considere $D_1:=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 4\,\}$ y $D_2:=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 4<x^2+y^2\leq 9\,\}$. Para $\lambda\in\mathbb{R}$ se define

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2-\lambda & \text{si} \quad (x,y)\in D_1 \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)\in D_2 \end{cases}$$

(a) Encuentre λ tal que f sea continua en $D_1\cup D_2$. De ahora en adelante, se considera dicho valor de λ.

(b) Pruebe que el grafo de f:

$$\mathrm{Gr}(f):=\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=f(x,y),\ (x,y)\in D_1\cup D_2\,\}$$

es cerrado y acotado

(c) Pruebe que, dado cualquier $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$, existe un punto en el grafo de f que minimiza la distancia a (x_0,y_0,z_0).