Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2001-3 Cálculo en Varias Variables
03 de Octubre de 2018

Auxiliar #2: Topología en $\mathbb{R}^d$

Profesor: David Salas.
Auxiliar: Matías Romero.

Recordemos:

Def: Para $A \subseteq \mathbb{R}^d$:

$\mathrm{Int}(A) := \{ x \in \mathbb{R}^d \mid \exists r > 0 : B(x,r) \subseteq A \}$
$\mathrm{Adh}(A) := \{ x \in \mathbb{R}^d \mid \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A : x_n \to x \}$
$\mathrm{Fr}(A) := \mathrm{Adh}(A) \setminus \mathrm{Int}(A)$

Prop: Para $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$:

(i) $\mathrm{Int}(A) \subseteq A, \quad A \subseteq \mathrm{Adh}(A)$
(ii) $\mathrm{Int}(A)^c = \mathrm{Adh}(A^c)$
(iii) Si $A \subseteq B$, entonces
$\mathrm{Int}(A) \subseteq \mathrm{Int}(B)$, $\mathrm{Adh}(A) \subseteq \mathrm{Adh}(B)$

Def: Para $A \subseteq \mathbb{R}^d$:

A es abierto si $\mathrm{Int}(A) = A$
A es cerrado si $\mathrm{Adh}(A) = A$

Prop: Para $A \subseteq \mathbb{R}^d$:

A abierto $\iff A^c$ cerrado.

Prop: Para cada $x \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$:

(i) $B(x,r)$ es abierta
(ii) $\bar{B}(x,r)$ es cerrada

P1. Sean A, B subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ .Demuestre las siguientes propiedades:

(a) $\mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B) \subseteq \mathrm{Int}(A \cup B)$
(b) $\mathrm{Adh}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Adh}(A) \cap \mathrm{Adh}(B)$
(c) $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$
(d) $\mathrm{Adh}(A \cup B) = \mathrm{Adh}(A) \cup \mathrm{Adh}(B)$
(e) $\mathrm{Int}(A) = \phi$, si A es numerable.

P2. Bosqueje los siguientes conjuntos y argumente cuál es su interior, adherencia y frontera de los siguientes conjuntos y determine si son cerrados o abiertos.

(a) $A_1 := (-\infty, -2] \cup (0, 3] \cup \{5, 6\} \cup (6, 10)$
(b) $A_2 := \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1|x_1| < x_2 < x_1^2 \}$
(c) $A_3 := \{ (\frac{1}{x}, \frac{1}{y+1}) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y \geq 0 \}$ **(Control 1 2016/1 Coordinado)**
(d) $A_4 := \{ x \in \mathbb{R}^d : \mathrm{sen}(\|x\|) \in [0, 1] \}$

P3. Calcule formalmente interior, adherencia y frontera de los siguientes conjuntos y determine si son cerrados o abiertos.

(a) $A_1 := \{ (\frac{1}{k}, (-1)^k) \in \mathbb{R}^2 : k \in \mathbb{N} \}$
(b) $A_2 := \{ (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_1 \in \mathbb{I}\}$, con $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ el conjunto de los irracionales.
(c) $A_3 := \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2, x_3 \in [-1, 1] \}$