Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2001-3 Cálculo en Varias Variables
26 de Agosto de 2018

Auxiliar #1: Límites y Normas

Profesor: David Salas.
Auxiliar: Matías Romero.

P1. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones nulas en $\mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable con $f(0) \neq 0$, $f'(0) \neq 0$. Estudie la convergencia de la sucesión en $\mathbb{R}^3$ definida por:

$$x_n = \left(\frac{a_n^2(|a_n| - |b_n|)b_n}{(a_n^2 + b_n^2)(a_n - b_n)}, \frac{a_n(\cos(b_n) - 1)}{a_n^2 + b_n^2}, \frac{f(b_n)^2 - f(0)^2}{b_n^\alpha}\right)$$

P2. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión d. Un resultado de álgebra lineal asegura que E es isomorfo a $\mathbb{R}^d$, esto es, que existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^d \to E$ biyectiva. Sea $\|\cdot\|_E : E \to \mathbb{R}_+$ una norma en E, es decir cumple:

(i) **(Identificación del Elemento Neutro)** $\|e\|_E = 0 \iff e = 0 \in E$

(ii) **(Ponderación por Escalar)** $\|\lambda e\|_E = |\lambda|\|e\|_E$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}, e \in E$

(iii) **(Desigualdad Triangular)** $\|e + f\|_E \leq \|e\|_E + \|f\|_E$, para todo $e, f \in E$.

Pruebe que la función $\|\cdot\| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definida por $\|x\| = \|T(x)\|_E$ es una norma en $\mathbb{R}^d$. ¿Se puede definir una norma en E a partir de una norma arbitraria en $\mathbb{R}^d$?

P3. Sea $\mathcal{P}_n$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a n. En $\mathcal{P}_n$ se define la función

$$\begin{aligned}\|\cdot\| : \mathcal{P}_n &\to \mathbb{R}\\ p(\cdot) &\mapsto \int_0^1 |p'(t)|dt + |p(0)|\end{aligned}$$

(a) Muestre que $\|\cdot\|$ es norma en $\mathcal{P}_n$.

(b) Encuentre $L \in \mathbb{R}$ tal que $\forall p \in \mathcal{P}_n, \|p\| \leq L \cdot (\max_{i\in\{0,1,\ldots,n\}}|a_i|)$, donde $p(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$

(c) Sea $p_0 = 1 + t + t^2 + t^3 + ... + t^n$ y $M = \langle\{p_0\}\rangle$. Determine el conjunto $M \cap B_{\|\cdot\|}(0, 1)$.

P4. Consideremos $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ el espacio de las matrices cuadradas de $n \times n$. Definimos

$$\begin{aligned}\|\cdot\|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R}\\ A &\mapsto \max_{j=1,\ldots,n}\left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|\right)\end{aligned}$$

(a) Muestre que $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ es una norma.

(b) Muestre que para toda matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ y para todo vector $x \in \mathbb{R}^n$ se cumple que:

$$\|Ax\|_1 \leq \|A\|_{\mathcal{M}}\|x\|_1$$