

P1 $\|\cdot\|: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ norma, es decir cumple $\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Identificación del cero)

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (Ponderación)

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Desigualdad Triangular)

Queremos probar para $x, y \in \mathbb{R}^d$ la siguiente identidad

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

Para esto probaremos ambos casos:

(I) $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$

(II) $\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$

(I) | Sean $x, y \in \mathbb{R}^d$, tenemos que

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \stackrel{(iii)}{\leq} \|x - y\| + \|y\| \quad \checkmark$$

(II) | Como (I) es cierto $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$, podemos intercambiar roles:

$$\text{scribble} \quad (I) \Rightarrow \|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| \stackrel{(ii)}{=} |-1| \|x - y\| = \|x - y\| \quad \checkmark$$

Concluimos que $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$



Teo: Una sucesión en $\mathbb{R}^d$ $(x_n)_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^d)$
(★) converge a un $x = (x^1, x^2, \dots, x^d) \in \mathbb{R}^d$ ssi:
 $(x_n^i)_n \subseteq \mathbb{R}$ converge a x^i , $\forall i = 1, \dots, d$

PZ (a) $x_n = \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \left(\frac{n+2}{n}\right)^n, \dots, \left(\frac{n+d}{n}\right)^n\right) \in \mathbb{R}^d$
Para $i \in \{1, \dots, d\}$,

$$x_n^i = \left(\frac{n+i}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^i$$

Luego, por (★), $x_n \rightarrow (e, e^2, \dots, e^d)$

(b) $x_n = \left(n\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n)\right)^3, \dots, n\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n)\right)^{4-d}\right) \in \mathbb{R}^d$

~~Notamos que~~ $x_n^i = n\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n)\right)^{4-i}$, con $i = 1, \dots, d$

Como $d \geq 5$, podemos tomar $i = 4$, de modo que
 $x_n^4 = n\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n)\right)^0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$

Luego, como $(x_n^4)_n$ no es convergente, (★) nos asegura que $(x_n)_n$ tampoco es convergente.

$$(d) \quad X_n = (\sqrt[n]{2018 \cdot n}, \cos(n\pi)) \in \mathbb{R}^2$$

Notamos que $x_n^2 = \cos(n\pi) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ par} \\ -1, & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$

$$\text{Como } \begin{cases} x_{2n}^2 = \cos(2n\pi) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \\ x_{2n+1}^2 = \cos((2n+1)\pi) = -1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1 \end{cases}$$

Son dos subsucesiones de $(x_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ que convergen a límites distintos, la sucesión real $(x_n^2)_n$ no es convergente, y por $(*)$, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^2$ tampoco.

Aún así, podríamos intentar encontrar una subsucesión convergente de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Para esto notamos primero que $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ es convergente

$$x_n^1 = \sqrt[n]{2018 \cdot n} = \underbrace{\sqrt[n]{2018}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\rightarrow 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

En consecuencia, cualquier subsucesión de $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$ va a ser convergente a 1. En particular, podemos tomar los pares y concluir que

$$\cancel{x_{2n}} \quad x_{2n} = (x_{2n}^1, x_{2n}^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (1, 1)$$

que es la subsucesión inducida por

$$\psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{que es estrictamente creciente, } \checkmark$$

$$n \mapsto 2n$$

P3 $x_n = (a_n, (-1)^n)$

Como $(a_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ es acotada, el Teo. de Bolzano-Weierstrass nos asegura que $\exists \varphi_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ estricta creciente tal que $(a_{\varphi_1(n)})_n$ es convergente en $\mathbb{R}$

Pero esto no es suficiente, pues no podemos asegurar que

$$x_{\varphi_1(n)}^2 = (-1)^{\varphi_1(n)} \text{ sea convergente}$$

Sin embargo, si consideramos solo los pares

$$x_{2\varphi_1(n)}^2 = (-1)^{2\varphi_1(n)} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

y además

$(x_{2\varphi_1(n)}^1)_n = (a_{2\varphi_1(n)})_n$ es subsecuencia de $(a_{\varphi_1(n)})_n$ que es convergente, por lo que $(x_{2\varphi_1(n)}^1)_n$ también lo es.

Luego, si llamamos $\varphi_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est. creciente
 $n \mapsto 2n$

y $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$n \mapsto \varphi_2 \circ \varphi_1(n) = 2\varphi_1(n)$ est. creciente por composición

Concluimos que $(x_{\varphi(n)})_n \subseteq \mathbb{R}^2$ es subsecuencia convergente.

$$(b) X_n = \left(\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right), \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right), \dots, \sin\left(\frac{n\pi}{d}\right) \right) \in \mathbb{R}^{d-1}$$

No tenemos que $\sin(k\pi) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$.

Luego, para $i = 2, \dots, d$,

$$\sin\left(\frac{n\pi}{i}\right) = 0, \text{ cuando } n = k \cdot i \text{ para algún } k \in \mathbb{N}$$

Sea $\psi_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que es est. creciente. Tenemos
 $n \mapsto 2n$

$$\text{que } x_{\psi_2(n)}^1 = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{múltiplos de 2})$$

Pero no podemos asegurar nada para las otras componentes.

Sea $\psi_3: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tenemos que
 $n \mapsto 3n$

$$x_{\psi_3(n)}^2 = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{múltiplos de 3})$$

pero si consideramos $(x_{\psi_3(n)}^1)_n$ perdemos la convergencia asegurada de los múltiplos de 2.

Queremos una función estricta creciente que ~~cumpla~~ sirva en ambos casos, es decir, que entregue múltiplos de 2 y de 3.

En efecto, $\psi_2 \circ \psi_3 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ cumple lo anterior,
 $n \mapsto 2 \cdot 3 \cdot n$

Por lo que obtenemos

$$\begin{cases} X^1_{\psi_2 \circ \psi_3}(n) = 0 \\ X^2_{\psi_2 \circ \psi_3}(n) = 0 \end{cases} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad (\text{múltiplos de 2 y 3})$$

es decir, $(X_{\psi_2 \circ \psi_3}(n)) \in \mathbb{R}^{d-1}$ converge en las 2 primeras componentes.

En general, para $i=2, \dots, d$, consideremos

$\varphi_i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que es estricta creciente
 $n \mapsto i \cdot n$

$$\Rightarrow X_{\varphi_i(n)}^{i-1} = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{múltiplos de } i)$$

y tomando $\varphi_2 \circ \varphi_3 \circ \dots \circ \varphi_i$ estricta creciente por composición tenemos que $\forall j=2, \dots, i$

$$X_{\varphi_2 \circ \varphi_3 \circ \dots \circ \varphi_i(n)}^{j-1} = \cancel{0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{múltiplos de } 2, 3, \dots, i)$$

es decir, $(X_{\varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_i(n)})_n \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ converge en las $i-1$ primeras componentes.

$$(\varphi(n) = d! \cdot n)$$

Finalmente, basta tomar $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_3 \circ \dots \circ \varphi_d$ que es estricta creciente por composición de modo que

$(X_{\varphi(n)})_n \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ converge en las $d-1$ componentes

y, por $(\star)$, $(X_{\varphi(n)})_n$ es convergente en $\mathbb{R}^{d-1}$.



P4 | $(x_n^i)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ acotada, $\forall i = 1, \dots, p$

Como $(x_n^1)_n$ es acotada, por el teo. B-W,

$\exists \varphi_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que

$(x_{\varphi_1(n)}^1)_{n \in \mathbb{N}}$ es subsucesión convergente.

Notamos ahora que, aunque no podamos asegurar que $(x_{\varphi_1(n)}^2)_n$ sea convergente, sabemos que es acotada al ser subsucesión de $(x_n^2)_n$ que es acotada por hipótesis.

(B-W)

$\Rightarrow \exists \varphi_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est. creciente t.q.

$(x_{\varphi_2 \circ \varphi_1(n)}^2)_n$ es convergente

Llamemos $\varphi_2 := \varphi_2 \circ \varphi_1$, $\rightarrow$ est. creciente por composición, notemos que también $(x_{\varphi_2(n)}^1)_n$ es convergente al ser subsucesión de $(x_{\varphi_1(n)}^1)_n$ que es convergente.

En general, para $i = 1, \dots, p-1$,
 si tenemos que $\exists \theta_i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ estricta creciente
 tal que $(x_{\theta_i(n)}^j)_n$ es convergente, $\forall j = 1, \dots, i$
 Como $(x_{\theta_i(n)}^{i+1})_n$ es subsucesión de $(x_n^{i+1})_n$ acotada,
 por B-W, $\exists \psi_{i+1}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est. creciente t.q.
 $(x_{\psi_{i+1} \circ \theta_i(n)}^{i+1})_n$ es convergente, y además
 $(x_{\psi_{i+1} \circ \theta_i(n)}^j)_n$ es convergente al ser subsucesión
 de $(x_{\theta_i(n)}^j)$ que es convergente $(\theta_{i+1} := \psi_{i+1} \circ \theta_i)$
 para cada $j = 1, \dots, i$.
 estricta creciente

Con esto probamos que para cada $i = 1, \dots, p-1$
 podemos construir iterativamente una función
 $\theta_{i+1}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ estricta creciente ~~que~~ que me
 asegura la convergencia de subsucesiones inducidas
 por ella en las primeras $i+1$ sucesiones originales, lo
 cual es justo lo que necesitamos para comenzar
 la siguiente iteración.

Finalmente, para $i = p-1$, llamemos $\psi = \theta_p$ que cumple
 $(x_{\psi(n)}^j)_n$ es convergente, $\forall j = 1, \dots, p$.

