Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2001-3 Cálculo en Varias Variables
20 de Septiembre de 2018

Auxiliar #0: Sucesiones y Límites en $\mathbb{R}^d$

Profesor: David Salas.
Auxiliar: Matías Romero.

P1. **(Desigualdad Triangular Inversa)** Sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^d$, pruebe que para cada $x, y \in \mathbb{R}^d$, tenemos que

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

P2. Estudie la convergencia de las siguientes sucesiones en $\mathbb{R}^d$, definidas por:

(a) $x_n = ((\frac{n+1}{n})^n, (\frac{n+2}{n})^n, \ldots, (\frac{n+d}{n})^n)$

(b) $x_n = (n(\frac{\pi}{2} - \arctan(n))^3, n(\frac{\pi}{2} - \arctan(n))^2, \ldots, n(\frac{\pi}{2} - \arctan(n))^{4-d})$, con $d \geq 5$

(c) $x_n = (\frac{a_n^2(|a_n| - |b_n|)b_n}{(a_n^2 + b_n^2)(a_n - b_n)}, \frac{a_n(\cos(b_n) - 1)}{a_n^2 + b_n^2})$, donde $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones nulas en $\mathbb{R}$.

(d) $x_n = (\sqrt[n]{2018n}, \cos(n\pi))$

P3. Encuentre una subsucesión convergente, definiendo explícitamente la función φ correspondiente, para las sucesiones en $\mathbb{R}^d$ definidas por:

(a) $x_n = (a_n, (-1)^n)$, con $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en $\mathbb{R}$.

(b) $x_n = (\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2}), \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{3}), \ldots, \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{d}))$

P4. **(Argumento Diagonal)** Consideremos p sucesiones reales acotadas $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ para $i = 1, \ldots, p$. Pruebe que existe una función $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que todas las subsucesiones $(x_{\varphi(n)}^i)_{n\in\mathbb{N}}$ con $i = 1, \ldots, p$ son convergentes.

Recuerdo

Definición (Subsucesión): *Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^d$ una sucesión, decimos que $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de la anterior cuando $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es estrictamente creciente. Es usual denotar $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ con $x_{n_k} = x_{\varphi(k)}$.*

Teorema: *Una sucesión real converge a $l \in \mathbb{R}$ si y solo si todas sus subsucesiones convergen a l.*

Teorema (Bolzano-Weierstrass en $\mathbb{R}$): *Toda sucesión real acotada tiene subsucesión convergente.*