MA2001-1 Cálculo En Varias Variables
Profesor: Raúl Uribe
Autor: Angelo Muñoz
Fecha: 2018

CVV: Guía de ejercicios 2

Índice General

Cualquier error detectado o contribución matemática que aporte a esta guía comunicarse al correo gelox97@gmail.com

1 Regla de la cadena

P1. Considere el campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por:

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} f(f(x,y), g(x,y)) \\ g(g(x,y), f(x,y)) \end{pmatrix}$$

con $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable.

Utilizando apropiadamente la regla de la cadena encuentre $J_F(x,y)$ en términos de f, g y sus derivadas. Debe indicar donde están evaluadas.

Solución:

Consideremos las transformaciones:

$$\begin{aligned} L : \quad & \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & (r,s,u,v) \longrightarrow L(r,s,u,v) = (f(r,s), g(u,v)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T : \quad & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ & (x,y) \longrightarrow T(x,y) = (f(x,y), g(x,y), g(x,y), f(x,y)) \end{aligned}$$

Ambas funciones son diferenciables por ser composición de funciones diferenciables. Ademas:

$$F(x,y) = (L \circ T)(x,y)$$

Por regla de la cadena:

$$J_F(x,y) = J_L(T(x,y)) \cdot J_T(x,y)$$

Donde:

$$J_L(r,s,u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r}(r,s) & \frac{\partial f}{\partial s}(r,s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

$$J_T(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

Así, se obtiene:

$$J_L(T(x,y)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r}(f(x,y), g(x,y)) & \frac{\partial f}{\partial s}(f(x,y), g(x,y)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial g}{\partial u}(g(x,y), f(x,y)) & \frac{\partial g}{\partial v}(g(x,y), f(x,y)) \end{pmatrix}$$

Finalmente concluimos que:

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r}(f,g)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial s}(f,g)\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial r}(f,g)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial s}(f,g)\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial u}(g,f)\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}(g,f)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial u}(g,f)\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}(g,f)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

P2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Considere el cambio a **coordenadas parabólicas** (u,v), con $u \in [0,\infty)$, $v \in (-\infty,\infty)$, dado por:

$$x = \frac{u^2 - v^2}{2},\ y = uv$$

Muestre que si se define:

$$g(u,v) = f(\frac{u^2 - v^2}{2}, uv)$$

Se tienen las siguientes igualdades:

(a) $\Delta f = \frac{1}{u^2+v^2}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)$

(b) $2x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + 4y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$

(c) Sea $f(x,y) = (\sqrt{\sqrt{x^2+y^2} - x})cos(\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}) + (\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x})sen(\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x})$. Calcule Δf.
Hint: calcule $u(x,y)$ y $v(x,y)$. Diga dónde están evaluadas las derivadas parciales.

Solución:

i) Se nos define $g(u,v) = f(\frac{u^2-v^2}{2}, uv)$. Es posible notar la composición:

$$g(u,v) = (f \text{ o } h)(u,v)$$

Donde $h(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, una función vectorial. Ambas son funciones diferenciables por composicin.Luego, por regla de la cadena se tiene que:

$$\nabla g(u,v) = \nabla f(h(u,v)) \cdot J_h(u,v)$$

En lo que sigue tomaremos $h(u,v) = h$ y la funcin g siempre esta evaluada en (u,v). Esta simplificacin la hacemos para no hacer tan engorrosa la notación. Con esto:

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(h)\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(h)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(h)\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(h)\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)$$

Donde:

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) = u$$
$$\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) = -v$$
$$\frac{\partial y}{\partial u}(u,v) = v$$
$$\frac{\partial y}{\partial v}(u,v) = u$$

Derivando nuevamente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} &= \frac{\partial f}{\partial x}(h) + u\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(h)\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(h)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\right) \\
&+ v\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(h)\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(h)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\right) \\
\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} &= \frac{\partial f}{\partial x}(h) + u\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(h)\cdot u + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(h)\cdot v\right) + v\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(h)\cdot u + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(h)\cdot v\right)
\end{aligned}$$

De la misma forma se obtiene:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = -\frac{\partial f}{\partial x}(h) - v\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(h)\cdot(-v) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(h)\cdot u\right) + u\cdot\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(h)\cdot(-v) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(h)\cdot u\right)$$

Luego:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v) = \left[u^2+v^2\right]\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right)$$

Por lo tanto:

$$\Delta f = \frac{1}{u^2+v^2}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)\right)$$

ii)
$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(h) + u\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(h)\cdot u + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(h)\cdot v\right) + v\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(h)\cdot u + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(h)\cdot v\right) \\
\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v) &= -\frac{\partial f}{\partial x}(h) - v\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(h)\cdot(-v) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(h)\cdot u\right) + u\cdot\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(h)\cdot(-v) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(h)\cdot u\right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) - \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v) = 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(h) + 4uv \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(h) + (u^2 - v^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(h) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(h)\right)$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) - \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v) = 2\frac{\partial f}{\partial x}(h) + 4y \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(h) + 2x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(h) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(h)\right)$$

iii) teniendo que $x = \dfrac{u^2 - v^2}{2}$, $y = uv$, sigue que $u^2 = 2x + v^2$ (de la ecuacin para x), por lo tanto, remplazando en la ecuacin para y queda:

$$y = v\sqrt{2x + v^2} \Rightarrow y^2 = v^2(2x + v^2) \Rightarrow v^4 + 2xv^2 - y^2 = 0$$

Resolviendo la cuadrática para v^2, queda

$$v^2 = -x \pm \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow v = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}$$

donde se toma la solución con $+$ pues $-x + \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$. Remplazando este valor de v en la ecuacin de x queda que $u = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$. Luego usamos la parte a) notando que

$$g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v)) = vcos(u) + usen(v)$$

Por lo tanto

- $\dfrac{\partial g}{\partial u} = -vsen(u) + sen(v)$
- $\dfrac{\partial g^2}{\partial^2 u} = -vcos(u)$
- $\dfrac{\partial g}{\partial v} = cos(u) + ucos(v)$
- $\dfrac{\partial g^2}{\partial^2 v} = -usen(v)$

y usando i) queda que:

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \frac{1}{u^2 + v^2}(-vcos(u) - usen(v)) \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\left(\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}\right) cos\left(\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}\right) \\
&\quad -\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\left(\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}\right) sen\left(\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}\right)
\end{aligned}$$

P3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Considere el cambio a **coordenadas elípticas** (τ, ψ), con $\tau \in \mathbb{R}$, $\psi \in [0, 2\pi]$, dado por:

$$x = \cosh(\tau)\cos(\psi),\ y = \sinh(\tau)\sin(\psi)$$

Muestre que si se define:

$$g(\tau, \psi) = f(\cosh(\tau)\cos(\psi), \sinh(\tau)\sin(\psi))$$

Se tienen que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{\sinh^2(\tau) + \sin^2(\psi)} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial \psi^2} \right)$$

Diga dónde están evaluadas las derivadas parciales.

Solución:

Se nos define $g(\tau, \psi) = f(\cosh(\tau)\cos(\psi), \sinh(\tau)\sin(\psi))$. Es posible notar la composición:

$$g(\tau, \psi) = (f \text{ o } h)(\tau, \psi)$$

Donde $h(\tau, \psi) = (x(\tau, \psi), y(\tau, \psi))$, una función vectorial. Ambas son funciones diferenciables por composición.Luego, por regla de la cadena se tiene que:

$$\nabla g(\tau, \psi) = \nabla f(h(\tau, \psi)) \cdot J_h(\tau, \psi)$$

En lo que sigue tomaremos $h(\tau, \psi) = h$ y la función g siempre esta evaluada en (τ, ψ). Esta simplificación la hacemos para no hacer tan engorrosa la notación. Con esto:

$$\frac{\partial g}{\partial \tau}(\tau, \psi) = \frac{\partial f}{\partial x}(h)\frac{\partial x}{\partial \tau}(\tau, \psi) + \frac{\partial f}{\partial y}(h)\frac{\partial y}{\partial \tau}(\tau, \psi)$$
$$\frac{\partial g}{\partial \psi}(\tau, \psi) = \frac{\partial f}{\partial x}(h)\frac{\partial x}{\partial \psi}(\tau, \psi) + \frac{\partial f}{\partial y}(h)\frac{\partial y}{\partial \psi}(\tau, \psi)$$

Donde:

$$\frac{\partial x}{\partial \tau}(\tau, \psi) = \sinh(\tau)\cos(\psi)$$
$$\frac{\partial x}{\partial \psi}(\tau, \psi) = -\cosh(\tau)\sin(\psi)$$
$$\frac{\partial y}{\partial \tau}(\tau, \psi) = \cosh(\tau)\sin(\psi)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \psi}(\tau,\psi) = \sinh(\tau) cos(\psi)$$

Derivando nuevamente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial \tau^2} &= \cos(\psi)\left[\frac{\partial f}{\partial x}(h)\cosh(\tau) + \sinh(\tau)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(h)\frac{\partial x}{\partial \tau}(\tau,\psi) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(h)\frac{\partial y}{\partial \tau}(\tau,\psi)\right)\right] \\
&+ \sin(\psi)\left[\frac{\partial f}{\partial y}(h)\sinh(\tau) + \cosh(\tau)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(h)\frac{\partial x}{\partial \tau}(\tau,\psi) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(h)\frac{\partial y}{\partial \tau}(\tau,\psi)\right)\right] \\
\frac{\partial^2 g}{\partial \tau^2} &= cos(\psi)\left[\frac{\partial f}{\partial x}(h)\cosh(\tau) + \sinh(\tau)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(h)\sinh(\tau)\cos(\psi) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(h)\cosh(\tau)\sin(\psi)\right)\right] \\
&+ \sin(\psi)\left[\frac{\partial f}{\partial y}(h)\sinh(\tau) + \cosh(\tau)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(h)\sinh(\tau)\cos(\psi) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(h)\cosh(\tau)\sin(\psi)\right)\right]
\end{aligned}$$

De la misma forma se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial \psi^2} &= \cosh(\tau)\left[-\frac{\partial f}{\partial x}(h)\cos(\psi) - \sin(\psi)\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(h)\cosh(\tau)\sin(\psi) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(h)\sinh(\tau)\cos(\psi)\right)\right] \\
&+ \sinh(\tau)\left[-\frac{\partial f}{\partial y}(h)\sin(\psi) + \cos(\psi)\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(h)\cosh(\tau)\sin(\psi) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(h)\sinh(\tau)\cos(\psi)\right)\right]
\end{aligned}$$

Luego:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \tau^2}(\tau,\psi) + \frac{\partial^2 g}{\partial \psi^2}(\tau,\psi) = \left[\sinh^2(\tau)\cos^2(\psi) + \cosh^2(\tau)\sin^2(\psi)\right]\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \tau^2}(\tau,\psi) + \frac{\partial^2 g}{\partial \psi^2}(\tau,\psi) = \left[\sinh^2(\tau) + \sin^2(\psi)\right]\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right)$$

Por lo tanto:

$$\Delta f = \frac{1}{\sinh^2(\tau) + \sin^2(\psi)}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial \psi^2}\right)$$

P4. [Propuesto] Considere el campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por:

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} g(x, g(x,y)) \\ g(g(x,y), y)) \end{pmatrix}$$

con $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable.

Utilizando apropiadamente la regla de la cadena encuentre $J_F(x,y)$ en términos de g y sus derivadas. Debe indicar donde están evaluadas.

P5. Sean:

- $s : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$
- $f, p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
- $g, h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

Suponga que todas las funciones son de clase C^4 en sus dominios. Para cada uno de los siguientes casos, calcular $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y \partial z}$ cuando corresponda.

i) $F(x,y) = f(g(x)k(y), g(x) + h(y))$

ii) $F(x,y,z) = f(g(x+y), h(y+z))$

iii) $F(x,y,z) = s(x^y, y^z, z^x)$

iv) $F(x,y) = s(x, g(x), p(x,y))$

Debe indicar donde está evaluada cada derivada.

P6. [Propuesto] Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Se define $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $g(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$, donde :

$$u(x,y) = x + y \ , \ v(x,y) = sen(x-y)$$

(a) Demuestre que:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 = 2\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + 2cos^2(x-y)\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

Explicite en donde están evaluadas cada una de las derivadas parciales.

(b) Verifique lo anterior para $f(u,v) = v^2 - u \cdot arcsen(v)$.

(c) Encuentre el plano tangente de la funcion $f(u,v)$ anterior en el punto $(1,0)$

P7. [Propuesto] Sean $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $\psi, \varphi \in \mathcal{C}^2$. Sea $z(x,y) = x\varphi(\frac{y}{x}) + \psi(\frac{y}{x})$. Calcule el valor de la siguiente expresión:

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

P8. **[Propuesto]** Considere las siguientes definiciones sobre campos vectoriales y escalares comúnmente conocidas como operadores diferenciales:

- Para un campo vectorial $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $F = (F_1, F_2, ..., F_n)$ se define la **divergencia** de F como:

$$Div(F) = \langle \nabla, F \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x)$$

- Para un campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $F = (F_1, F_2, F_3)$ se define el **rotor** como:

$$Rot(F) = \nabla \times F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

- Para un campo escalar $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se define el **laplaciano** como:

$$\Delta f = Div(\nabla f) = \langle \nabla, \nabla f \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$$

Se pide:

i) Sean $F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ambas funciones C^1. Demuestre que:

$$Div(fF) = fDiv(F) + \langle F, \nabla f \rangle$$

ii) Sean $F : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $G : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ambas funciones C^1. Demuestre que:

$$Div(F \times G) = \langle G, rot(F) \rangle - \langle F, rot(G) \rangle$$

iii) Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una función C^2. Demuestre que:

$$Div(Rot(F)) = 0$$

iv) Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ambas funciones C^2. Demuestre que:

$$Div(f\nabla g - g\nabla f) = f\Delta g - g\Delta f \quad \text{y} \quad \Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle$$

P9. [Propuesto] Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2. Sabemos que el laplaciano de esta función está dado por

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Considere el cambio a **coordenadas polares** (ρ, θ), con $\rho \in [0, \infty]$ y $\theta \in [0, 2\pi]$.:

$$x = \rho cos(\theta) \qquad y = \rho sen(\theta)$$

i) Muestre que si se define $g(\rho, \theta) = f(\rho cos(\theta), \rho sen(\theta))$, para $\rho \neq 0$ se tiene lo siguiente:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial g}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

Diga dónde están evaluadas las derivadas parciales.

ii) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} cos(arct(\tfrac{y}{x})) - arct(\frac{y}{x}) sen(arct(\frac{y}{x})).$$

Encuentre el laplaciano de esta función.

P10. [Propuesto] Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Sabemos que el laplaciano de esta función está dado por

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Considere las **coordenadas esféricas** (r, θ, ϕ), con $r \in [0, \infty]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ y $\varphi \in [0, \pi]$. Muestre que si se define:

$$g(r, \theta, \varphi) = f(r sen(\varphi) cos(\theta), r sen(\varphi) sen(\theta), r\cos(\varphi))$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial g}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sen(\varphi)}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(sen(\varphi)\frac{\partial g}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{r^2 sen^2(\varphi)}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

Diga dónde están evaluadas las derivadas parciales.

2 Regla de la cadena en aplicación a las EDP'S

P1. Se desea modelar el comportamiento del calor en un disco en $\mathbb{R}^2$, dado que la Temperatura en el exterior del disco es $1°$ y en el interior de este es $0°$.
Es sabido que la EDP del calor es la siguiente:

$$\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} = \alpha \Delta T(x,y,t)$$

para algún $\alpha \in \mathbb{R}^+$, siendo T la temperatura, (x,y) las coordenadas espaciales, t el tiempo y ΔT su laplaciano.

Las condiciones que se supondrán para modelar este problema, es que luego de un tiempo muy grande, la variación de temperatura es nula, lo que implica que $\Delta T = 0$, la otra condición es que por la geometría del problema, la Temperatura dependerá exclusivamente del radio y se puede olvidar la dependencia de t en el tiempo grande (es decir, $T(x,y,t) = T(x,y)$).

El problema se modela con la siguiente EDP:

$$P \begin{cases} \Delta T(x,y) = 0 & \text{si } 1 \leq x^2+y^2 \leq 36 \\ T(x,y) = 0 & \text{si } x^2+y^2 = 1 \\ T(x,y) = 1 & \text{si } x^2+y^2 = 36 \end{cases} \tag{1}$$

i) Sea $v : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ de clase C^2. Se define:

$$T(x,y) = v(r(x,y))$$

con $r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Pruebe que:

$$\Delta T(x,y) = v''(r) + \frac{1}{r}v'(r)$$

ii) Usando la parte anterior, resuelva el problema (P).

$\boxed{\textbf{Solución:}}$

i) Se tiene que:

$$\Delta T(x,y) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Al derivar T por regla de la cadena se obtiene:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = v'(r)\frac{\partial r}{\partial x} = v'(r)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = v'(r)\frac{\partial r}{\partial y} = v'(r)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Derivando nuevamente se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(v'(r)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\\ &= v''(r)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + v'(r)\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\\ &= v''(r)\frac{x^2}{x^2+y^2} + v'(r)\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

Análogamente para y:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = v''(r)\frac{y^2}{x^2+y^2} + v'(r)\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = v''(r) + \frac{1}{r}v'(r)$$

ii) El problema se puede reescribir como:

$$P' \left\{ \begin{array}{lll} v''(r) + \frac{1}{r}v'(r) = 0 & si & 1 \leq r^2 \leq 36 \\ v(r) = 0 & si & r^2 = 1 \\ v(r) = 1 & si & r^2 = 36 \end{array} \right\}$$

Para resolver esto se resuelve la EDO definiendo $u(r) = v'(r)$ luego por separación de variables:

$$\frac{du}{u} = -\frac{dr}{r}$$

integrando a ambos lados se obtiene

$$ln(u) = -ln(r) + C$$

Aplicando exponencial a ambos lados:

$$u(r) = \frac{A}{r}$$

Volviendo a la función $v(r)$

$$v(r) = A \cdot ln(r) + B$$

Imponiendo $v(1) = 0$ y $v(6) = 1$ se obtiene:

$$v(r) = \frac{ln(r)}{ln(6)}$$

y volviendo a las coordenadas iniciales.

$$T(x,y) = \frac{ln(\sqrt{x^2+y^2})}{ln(6)}$$

P2. Se tiene una cuerda atada a los dos extremos con tensión T y masa M, se define $c = \sqrt{\frac{T}{M}}$. La ecuación de ondas de esta cuerda, se modela con la siguiente EDP:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x,t)$$

Sea $u(x,t) := x + ct$ y $v(x,t) := x - ct$, y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2, para resolver este problema se propone definir el siguiente cambio de variable, $\varphi(x,t) = f(u(x,t), v(x,t))$.

i) Muestre que la ecuación definida queda reescrita como $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0$

ii) Resuelva la expresión anterior y de la solución general de la EDP en las coordenadas originales.

iii) Encuentre una solución del problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t) - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x,t) = 0 \\ \varphi(x,0) = y_0(x) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(x,0) = v_0(x) \end{cases}$$

iv) Pruebe que si $y_0(x) = 0$ y $v_o(x) = \sin(x)$, entonces:

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{c}\sin(x)\sin(ct)$$

Hint: Recuerde la identidad $\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2} = \sin(x)\sin(y)$

Solución:

i) $\varphi(x,t) = f(u,v)$. Aplicando Regla de la Cadena. Definiendo $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x,t) = (u(x,t), v(x,t))$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}(x,t)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)$$

Luego:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Análogamente:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Ahora, recordemos que $u = x + ct$, $v = x - ct$, por lo que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = c \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = -c$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

Reemplazando, se obtiene:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

La ecuación de ondas nos entrega la igualdad de los términos a la izquierda de la igualdad, por lo tanto los términos a la derecha serán iguales.

$$\cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u} + \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}} = \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u} + \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}}$$

Luego se obtiene que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u} = 0.$$

ii) Resolviendo:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u} = 0 \Big/ \int du \implies \frac{\partial f}{\partial v} = k_1(v) \Big/ \int dv \implies f(u,v) = c_1(u) + c_2(v).$$

Así, $\varphi(x,t) = c_1(x+ct) + c_2(x-ct)$

iii) Imponemos las condiciones iniciales:

$\varphi(x,0) = c_1(x) + c_2(x) = y_0(x)$ **(1)**

$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,0) = c \cdot c_1'(x) - c \cdot c_2'(x) = v_0(x) \Big/ \int_{x_0}^{x} \implies c_1(x) - c_2(x) = \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} v_0(s)ds$ **(2)**

Resolviendo el sistema de ecuaciones **(1)**, **(2)**, se obtiene que:

$$c_1(x+ct) = \frac{y_0}{2}(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x+ct} v_0(s)ds + k$$

$$c_2(x-ct) = \frac{y_0}{2}(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x-ct} v_0(s)ds + k$$

Concluimos que:

$$\varphi(x,t) = \frac{y_0(x+ct) + y_0(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s)ds$$

iv) Si $y_0(x) = 0$ y $v_0(x) = \sin(x)$

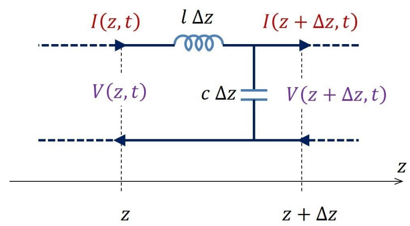
$$\varphi(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \sin(s)ds$$

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{c}\frac{\cos(x-ct) - \cos(x+ct)}{2}$$

Utilizando el hint, tenemos que:

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{c}\sin(x)\sin(ct)$$

P3. El campo electromagnético (por ejemplo, la señal de televisión) que se propaga a través de una sección de largo Δz de un cable coaxial puede ser modelado a través del siguiente modelo circuital:



Así, para cualquier punto del cable, se definen las funciones:

$$\begin{aligned} V:\mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} & \qquad I:\mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (z,t) &\to V(z,t) & \qquad (z,t) &\to I(z,t) \end{aligned}$$

Las cuales representan, respectivamente, el voltaje y la corriente en un punto z del cable en un cierto instante t. Las constantes l y c corresponden a la inductancia y capacitancia por unidad de longitud, respectivamente, y son valores conocidos de fábrica.

A partir de esto, y utilizando las leyes de Kirchoff, se obtienen las siguientes ecuaciones para V e I:

$$V(z,t) = V(z+\Delta z,t) + l\cdot\Delta z\cdot\frac{\partial I}{\partial t}(z,t) \tag{2}$$

$$I(z,t) = I(z+\Delta z,t) + c\cdot\Delta z\cdot\frac{\partial V}{\partial t}(z,t) \tag{3}$$

El objetivo del problema es determinar las funciones V e I. Para ello, se pide hallar lo siguiente:

i) Reordenando apropiadamente las ecuaciones **(2)** y **(3)** y calculando el límite cuando $\Delta z \to 0$ demuestre las siguientes relaciones, conocidas como **ecuaciones telegráficas**.

$$\frac{\partial V}{\partial z}(z,t) = -l\cdot\frac{\partial I}{\partial t}(z,t) \tag{4}$$

$$\frac{\partial I}{\partial z}(z,t) = -c\cdot\frac{\partial V}{\partial t}(z,t) \tag{5}$$

ii) Suponiendo que V e I son funciones de clase C^2, utilice las ecuaciones telegráficas **(4)** y **(5)** para obtener las siguientes EDP'S para V e I:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}(z,t) = lc\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(z,t) \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2}(z,t) = lc\cdot\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}(z,t) \tag{7}$$

iii) Demuestre que si se define $u := \frac{1}{\sqrt{lc}}$ y dadas dos funciones $V_1, V_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ambas de clase C^2, la función:

$$V(z,t) = V_1(t - \tfrac{z}{u}) + V_2(t + \tfrac{z}{u})$$

Es solución de **(6)**

iv) Demuestre que si se define $R_c := \sqrt{\frac{l}{c}}$ y se consideran las funciones V_1 y V_2 definidas en c), la función:

$$I(z,t) = \tfrac{1}{R_c}\left[V_1\left(t - \tfrac{z}{u}\right) - V_2\left(t + \tfrac{z}{u}\right)\right]$$

Es solución de **(7)**

v) Demuestre que las soluciones encontradas para V e I satisfacen las ecuaciones telegráficas **(4)** y **(5)**.

Solución:

i) Reordenando las ecuaciones **(2)** y **(3)**:

$$-l \cdot \tfrac{\partial I}{\partial t}(z,t) = \tfrac{V(z+\Delta z,t)-V(z,t)}{\Delta z}$$

$$-c \cdot \tfrac{\partial V}{\partial t}(z,t) = \tfrac{I(z+\Delta z,t)-I(z,t)}{\Delta z}$$

y tomando el límite cuando $\Delta z \to 0$, se obtiene:

$$-l \cdot \tfrac{\partial I}{\partial t}(z,t) = \tfrac{\partial V}{\partial z}(z,t)$$

$$-c \cdot \tfrac{\partial V}{\partial t}(z,t) = \tfrac{\partial I}{\partial z}(z,t)$$

ii) Derivando con respecto a z la primera ecuación se obtiene:

$$-l \cdot \tfrac{\partial}{\partial z}\left(\tfrac{\partial I}{\partial t}(z,t)\right) = \tfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}(z,t)$$

Dado que $I \in C^2$

$$-l \cdot \tfrac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{\partial I}{\partial z}(z,t)\right) = \tfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}(z,t)$$

pero por la ecuación telegráfica **(5)** se tiene que:

$$-l \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(-c \cdot \frac{\partial V}{\partial t}(z,t)\right) = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}(z,t)$$

$$lc \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(z,t) = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}(z,t)$$

Con esto se obtiene la primera igualdad. La segunda se encuentra de forma similar Derivando con respecto a z la segunda ecuación:

$$-c \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial t}(z,t)\right) = \frac{\partial^2 I}{\partial z^2}(z,t)$$

Dado que $V \in C^2$

$$-c \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial z}(z,t)\right) = \frac{\partial^2 I}{\partial z^2}(z,t)$$

pero por la ecuación telegráfica **(4)** se tiene que:

$$-c \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(-l \cdot \frac{\partial I}{\partial t}(z,t)\right) = \frac{\partial^2 I}{\partial z^2}(z,t)$$

$$lc \cdot \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}(z,t) = \frac{\partial^2 I}{\partial z^2}(z,t)$$

iii) Derivando con respecto a z:

$\frac{\partial V}{\partial z}(z,t) = -V_1'(t-\frac{z}{u}) \cdot \frac{1}{u} + V_2'(t+\frac{z}{u}) \cdot \frac{1}{u}$

$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}(z,t) = V_1''(t-\frac{z}{u}) \cdot \frac{1}{u^2} + V_2''(t+\frac{z}{u}) \cdot \frac{1}{u^2}$

Derivando con respecto a t:

$\frac{\partial V}{\partial t}(z,t) = V_1'(t-\frac{z}{u}) + V_2'(t+\frac{z}{u})$

$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(z,t) = V_1''(t-\frac{z}{u}) + V_2''(t+\frac{z}{u})$

Notando que $u^2 = \frac{1}{lc}$ por lo que $\frac{1}{u^2} = lc$, vemos que:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}(z,t) = V_1''(t-\frac{z}{u}) \cdot \frac{1}{u^2} + V_2''(t+\frac{z}{u}) \cdot \frac{1}{u^2} = \frac{1}{u^2} \cdot \left(V_1''(t-\frac{z}{u}) + V_2''(t+\frac{z}{u})\right) = lc \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(z,t)$$

iv) Derivando con respecto a z:

$\frac{\partial I}{\partial z}(z,t) = \frac{1}{R_c} \cdot \left(-V_1'(t-\frac{z}{u}) \cdot \frac{1}{u} - V_2'(t+\frac{z}{u}) \cdot \frac{1}{u})\right)$

$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2}(z,t) = \frac{1}{R_c} \cdot \left(V_1''(t-\frac{z}{u}) \cdot \frac{1}{u^2} - V_2''(t+\frac{z}{u}) \cdot \frac{1}{u^2}\right)$

Derivando con respecto a t:

$\frac{\partial I}{\partial t}(z,t) = \frac{1}{R_c} \cdot \left(V_1'(t-\frac{z}{u}) - V_2'(t+\frac{z}{u})\right)$

$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}(z,t) = \frac{1}{R_c} \cdot \left(V_1''(t-\frac{z}{u}) - V_2''(t+\frac{z}{u})\right)$

Notando que $u^2 = \frac{1}{lc}$ por lo que $\frac{1}{u^2} = lc$, vemos que:

$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2}(z,t) = \frac{1}{R_c} \cdot \left(V_1''(t-\frac{z}{u}) \cdot \frac{1}{u^2} - V_2''(t+\frac{z}{u}) \cdot \frac{1}{u^2}\right)$

$= \frac{1}{u^2} \cdot \frac{1}{R_c} \cdot \left(V_1''(t-\frac{z}{u}) - V_2''(t+\frac{z}{u})\right) = lc \cdot \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}(z,t)$

v) Por el apartado anterior tenemos que:

$\frac{\partial V}{\partial z}(z,t) = -V_1'(t-\frac{z}{u}) \cdot \frac{1}{u} + V_2'(t+\frac{z}{u}) \cdot \frac{1}{u}$

$\frac{\partial V}{\partial t}(z,t) = V_1'(t-\frac{z}{u}) + V_2'(t+\frac{z}{u})$

$\frac{\partial I}{\partial z}(z,t) = \frac{1}{R_c} \cdot \left(-V_1'(t-\frac{z}{u}) \cdot \frac{1}{u} - V_2'(t+\frac{z}{u}) \cdot \frac{1}{u})\right)$

$\frac{\partial I}{\partial t}(z,t) = \frac{1}{R_c} \cdot \left(V_1'(t-\frac{z}{u}) - V_2'(t+\frac{z}{u})\right)$

Notando que $l \cdot \frac{1}{R_c} = \frac{1}{u} = \sqrt{lc}$ y $\frac{1}{u \cdot R_c} = \sqrt{lc} \cdot \sqrt{\frac{c}{l}} = c$

Vemos que la primera ecuación telegráfica se cumple:

$$\frac{\partial V}{\partial z}(z,t) = -V_1'(t-\frac{z}{u}) \cdot \frac{1}{u} + V_2'(t+\frac{z}{u}) \cdot \frac{1}{u}$$

$$-l\frac{\partial I}{\partial t}(z,t) = -l\frac{1}{R_c} \cdot \left(V_1'(t-\frac{z}{u}) - V_2'(t+\frac{z}{u})\right)$$

y la segunda también:

$$\frac{\partial I}{\partial z}(z,t) = -\frac{1}{R_c} \cdot \left(V_1'(t-\frac{z}{u}) \cdot \frac{1}{u} + V_2'(t+\frac{z}{u}) \cdot \frac{1}{u})\right)$$

$$-c \cdot \frac{\partial V}{\partial t}(z,t) = -c \cdot \left(V_1'(t-\frac{z}{u}) + V_2'(t+\frac{z}{u})\right)$$

P4. **[Propuesto]** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Considere la ecuación en derivadas parciales.

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

i) Haga el cambio de variables $f(x, y) = g(u(x, y), v(x, y))$, donde:

$$u(x, y) = x + y$$
$$v(x, y) = 2x + y$$

y calcule las derivadas de f en función de las de g.

ii) Muestre que g satisface la ecuación:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$$

iii) Resuelva la ecuación anterior y entregue una solución general de la ecuación original.

iv) Encuentre una solución particular que no sea la función nula ni un polinomio.

P5. **[Propuesto]** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^2 que verifica la siguiente EDP:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \tag{8}$$

Sea $h(u, v) = f(u + v, v)$

i) Demuestre que h verifica la EDP:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^u} = \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 h}{\partial v^2} \tag{9}$$

ii) **[Propuesto]** Suponga que $h(u, v) = g(u + \lambda v)$ con $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^2. Muestre que g satisface **(9)** y encuentre una solución no trivial de la EDP **(8)**.

3 Teorema de Taylor

P1. Encontrar la mejor aproximación de segundo grado para las siguientes funciones en el punto descrito.

i) $f(x,y) = e^x \cos(x+y)$ en $(x,y) = (0,0)$.

ii) $f(x,y) = x^2y + x\cos(y)$ en $(x,y) = (1,0)$.

iii) $f(x,y) = x^{y+1}$ en $(x,y) = (2,0)$.

iv) $f(x,y,z) = (x^2 + 2xy + y^2)e^z$ en $(x,y,z) = (1,2,0)$.

v) $f(x,y,z) = xy^2z^3$ en $(x,y,z) = (1,2,-1)$.

Solución:

i) Derivando:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x \cos(x+y) - e^x \sin(x+y)$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -e^x \sin(x+y)$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2e^x \sin(x+y)$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -e^x \cos(x+y)$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -e^x \sin(x+y) - e^x \cos(x+y)$, dado que $f \in C^2$.

luego en la fórmula:

$$\mathcal{T}_{f(0,0)}(x,y) = f(0,0) + \nabla f(0,0)^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t \mathcal{H}_f(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{T}_{f(0,0)}(x,y) = 1 + (1 \cdot x + 0 \cdot y) + \tfrac{1}{2}(0 \cdot x^2 - 1 \cdot xy - 1 \cdot yx - 1 \cdot y^2)$$

Tenemos:

$$\mathcal{T}_{f(0,0)}(x,y) = 1 + x - xy - \tfrac{y^2}{2}$$

ii) Derivando:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + \cos(y)$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - x\sin(y)$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y$

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -x\cos(y)$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2x - \sin(y)$, dado que $f \in C^2$.

luego en la fórmula:

$$\mathcal{T}_{f(1,0)}(x,y) = f(1,0) + \nabla f(1,0)^t \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}^t \mathcal{H}_f(1,0) \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{T}_{f(1,0)}(x,y) = 1 + (1\cdot(x-1) + 1\cdot y) + \tfrac{1}{2}(0\cdot(x-1)^2 + 2\cdot(x-1)y + 2\cdot y(x-1) - 1\cdot y^2)$$

Tenemos:

$$\mathcal{T}_{f(1,0)}(x,y) = x - y + 2xy - \tfrac{y^2}{2}$$

iii) Los demás apartados quedan [**Propuestos**]

P2. a) Sea la función:

$$f(x,y,z) = x^2y^4z + 3xy^2z - 5x^2y^3 + 5x^3z + (x^8+y^8)e^{-x^2-y^2}\cos(xyz)$$

Encuentre su polinomio de Taylor de grado 6 en torno al punto $(0,0,0)$.

b) Sea la función:

$$f(x,y) = \cos(x^2+y)\sin(3yx) + \ln(1+x^2y)$$

Encuentre el polinomio de Taylor de grado 12 de la función en torno al punto $(0,0)$.

Hint 1: Puede serle útil recordar:

- $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
- $ln(x+1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ para $|x| < 1$
- $\sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
- $\cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

Hint 2: Para b) utilice cambios de variable adecuados.

Solución:

a) Primero recordar que si se tiene un polimonio de grado j su polinomio de taylor de grado j, entorno al origen, es el mismo polinomio. Dicho esto, Como buscamos el polinomio de Taylor de grado 6, basta analizar los términos polinómicos de $f(x, y, z)$

- x^2y^4z tiene grado 7, y al ser multiplicación de polinomios no entra al polinomio de Taylor pedido. (Compruébelo)
- $3xy^2z$, $5x^3z$ y $5x^2y^3$ tienen grado 4,4 y 5 respectivamente, menores que 6, por lo que entran en el polinomio de Taylor.
- $(x^8 + y^8)e^{-x^2-y^2}\cos(xyz)$ no es polinómico a priori, por lo que buscaremos sus polinomios de taylor asociados, e^u y $\cos(u)$ en torno al punto $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

$$e^{-x^2-y^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2 - y^2)^k}{k!}$$

y

$$\cos(xyz) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(xyx)^{2k}$$

Luego:

$$(x^8 + y^8)e^{-x^2-y^2}\cos(xyz) = (x^8 + y^8)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2 - y^2)^k}{k!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!}(xyx)^{2i}$$

Es fácil ver que esta expresión tiene grado mayor a 6, con multiplicación de polinomios, por tanto no entra al Taylor pedido.

Con esto se deduce que:

$$\mathcal{T}_{f(0,0,0)}(x, y, z) = 3xy^2z - 5x^2y^3 + 5x^3z$$

b) **[Propuesto]**

P3. a) Suponga que solo dispone de una calculadora con las 4 operaciones básicas. Determine un valor aproximado para:

$$\frac{0.97}{\sqrt{15.05 + \sqrt[3]{0.98}}}$$

b) Calcular el valor aproximado de $\sqrt{1.02} \cdot \sqrt[3]{0.97}$.

c) Calcular el valor aproximado de $(0.99 \cdot e^{0.2})^8$

Solución:

a) Usamos una función de tres variables que tenga la forma funcional acorde al problema. Sea la función:

$$f(x,y,z) = \frac{x}{\sqrt{y + \sqrt[3]{z}}}$$

y realicemos un taylor de orden 1 en torno al punto $(1,15,1)$

$$\mathcal{T}_{f(1,15,1)}(x,y,z) = f(1,15,1) + \nabla f(1,15,1)^t \begin{pmatrix} x-1 \\ y-15 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{y+\sqrt[3]{z}}}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -\dfrac{x}{2}\left(y+\sqrt[3]{z}\right)^{-\frac{3}{2}}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -\dfrac{x}{2}\left(y+\sqrt[3]{z}\right)^{-\frac{3}{2}}\dfrac{z^{-\frac{2}{3}}}{3}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,15,1) = \dfrac{1}{4}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,15,1) = -\dfrac{1}{128}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,15,1) = -\dfrac{1}{384}$

evaluando en $\mathcal{T}_{f(1,15,1)}(x,y,z)$ en el punto $(0.97, 15.05, 0.98)$:

$$\mathcal{T}_{f(1,15,1)}(0.97, 15.05, 0.98) = f(1,15,1) + (\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{128}, -\tfrac{1}{384}) \begin{pmatrix} -0.03 \\ 0.05 \\ -0.02 \end{pmatrix}$$

equivalente a:

$$\mathcal{T}_{f(1,15,1)}(0.97, 15.05, 0.98) = \frac{1}{4} - \frac{3.01}{384} = 0.242161$$

luego:

$$\frac{0.97}{\sqrt{15.05 + \sqrt[3]{0.98}}} \approx 0.242161$$

b) Usamos una función de dos variables que tenga la forma funcional acorde al problema. Sea la función:

$$f(x,y) = \sqrt{x}\,\sqrt[3]{y}$$

y recordamos que siempre podemos conseguir una mejor aproximación al comportamiento de una función al realizar un "Taylor" de orden 2 en torno un punto. El punto escogido, por cercanía, es $(1,1)$.

$$\mathcal{T}_{f(1,1)}(x,y) = f(1,1) + \nabla f(1,1)^t \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}^t \mathcal{H}_f(1,1)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\sqrt[3]{y}}{2\sqrt{x}}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{y^2}}$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\dfrac{\sqrt[3]{y}}{4\sqrt{x^3}}$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\dfrac{2\sqrt{x}}{9\sqrt[3]{y^5}}$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{1}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{y^2}}$, dado que $f \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$.
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \dfrac{\sqrt[3]{1}}{2\sqrt{1}} = \dfrac{1}{2}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -\dfrac{\sqrt{1}}{3\sqrt[3]{1^2}} = \dfrac{1}{3}$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = -\dfrac{\sqrt[3]{1}}{4\sqrt{1^3}} = -\dfrac{1}{4}$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = -\dfrac{2\sqrt{1}}{9\sqrt[3]{1^5}} = -\dfrac{2}{9}$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1) = \dfrac{1}{6\sqrt{1}\sqrt[3]{1^2}} = \dfrac{1}{6}$

evaluando en $\mathcal{T}_{f(1,1)}(x,y)$ en el punto $(1.02, 0.97)$:

$$\mathcal{T}_{f(1,1)}(1.02,0.97) = f(1,1) + \left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix} 0.02 \\ -0.03 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0.02 \\ -0.03 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.02 \\ -0.03 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{T}_{f(1,1)}(1.02,0.97) = 1 + \tfrac{0.02}{2} - \tfrac{0.03}{3} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0.02 \\ -0.03 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -\frac{0.02}{4} - \frac{0.03}{6} \\ \frac{0.02}{6} + \frac{2\cdot 0.03}{9} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{T}_{f(1,1)}(1.02,0.97) = 1 + 0.01 - 0.01 + \frac{1}{2}\left[0.02 \cdot \left(-\frac{0.02}{4} - \frac{0.03}{6}\right) - 0.03\left(\frac{0.02}{6} + \frac{2\cdot 0.03}{9}\right)\right]$$

$$\mathcal{T}_{f(1,1)}(1.02,0.97) = 1 + \frac{1}{2}\left[0.02 \cdot (-0.01) - 0.03\,(0.01)\right]$$

$$\mathcal{T}_{f(1,1)}(1.02, 0.97) = 1 - 0.00025$$

luego:

$$\sqrt{1.02} \cdot \sqrt[3]{0.97} = 0.99975$$

P4. **[Propuesto]** Obtenga la expansión de Taylor de orden 2 de la función:

$$f(x, y) = x \log(1 + y) + \sin(x + y)$$

en torno a (0,0). Luego, pruebe que para $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$ se tiene que :

$$|f(x, y) - T_2(x, y)| \leq \frac{3}{2}(|x| + |y|)^3$$

donde T_2 es el polinomio de Taylor de orden 2.

P5. **[Propuesto]** Considere la función:

$$f(x, y) = e^{ax+y^2} + b \cdot \sin(x^2 + y^2).$$

Determinar los valores de a y b para que el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el origen sea horizontal y el polinomio de Taylor de segundo orden centrado en el origen tome el valor de 6 en el punto $(1, 2)$.

4 Teorema de la función implícita

4.1 TFI y ecuaciones con incógnitas

P1. (Teorema de la función implicita en una ecuación con dos incógnitas)

a) Considere una función $f(x,y) \in C^1$ tal que para algún punto (x_0, y_0) se cumple el teorema de la función implícita. Entonces se tiene un intervalo abierto $I_{x_0} \subset \mathbb{R}$ centrado en un punto x_0 y una única función $y(x) \in C^1$ en I tal que:

$$f(x, y(x)) = 0,\ \forall x \in I_{x_0}$$

Obtenga $y'(x)$ usando regla de la cadena.

b) Considere la ecuación:

$$x^3y^2 - 3xy + 2 = 0$$

Ocupando el TFI en un entorno del punto $(x, y) = (1, 2)$, vea si se puede definir implícitamente a la variable y en función de x. Luego ocupe la parte i) para encontrar $y'(x)$ según el teorema.

Solución:

a) Usando regla de la cadena sobre la igualdad:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x))\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))\frac{dy}{dx}(x) = 0\ \forall x \in I_{x_0}$$

Despejando $\frac{dy}{dx}(x)$ se obtiene:

$$\frac{dy}{dx}(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))}\ \forall x \in I_{x_0}$$

b) Definiendo:

$$f(x, y) = x^3y^2 - 3xy + 2$$

vemos si se cumplen las hipótesis del teorema de la función implícita:

- $f(1, 2) = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 + 2 = 0$
- $f \in C^1$, por ser composición de funciones continuamente diferenciables en $\mathbb{R}^2$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^3y - 3x$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1 \neq 0$

Por tanto, $\exists I_1, V_2$ vecindades de 1 y 2 respectivamente, y una única función $y(x) : I_1 \to V_1$, $y(x) \in C^1$ tal que:

$$f(x, y(x)) = 0,\ \forall x \in I_1$$

Además por la parte a):

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x) = -\frac{3x^2y^2-3y}{2x^3y-3x} \ \forall x \in I_1$$

P2. (Teorema de la función implícita en una ecuación con tres incógnitas)

a) Considere una función $f(x, y, z) \in C^1$ tal que para algún punto (x_0, y_0, z_0) se cumple el teorema de la función implícita. Entonces se tiene una vecindad $I_{(x_0,y_0)} \subset \mathbb{R}^2$ centrada en un punto (x_0, y_0) y una única función $z(x, y) \in C^1$ en $I_{(x_0,y_0)}$ tal que:

$$f(x, y, z(x, y)) = 0, \ \forall (x, y) \in I_{(x_0,y_0)}$$

Obtenga $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ usando regla de la cadena.

b) Considere la ecuación:

$$zx^3 - z^3yx = 0$$

Ocupando el TFI en un entorno del punto $(x, y, z) = (1, 1, 1)$, vea si se puede definir implícitamente a la variable z en función de (x, y). Luego ocupe la parte i) para encontrar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ según el teorema.

c) Considere:

$$f(x, y, z) = \cos(z^2) + y^2e^x + xy + x^2$$

Ocupando. el TFI en un entorno del punto $(x, y, z) = (0, 0, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$, vea si se puede definir implícitamente a la variable z en función de (x, y). Luego ocupe la parte i) para encontrar $\nabla z = (\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y})$. Encuentre ademas la matriz hessiana, $\mathcal{H}_z$.

Solución:

a) Usando regla de la cadena sobre la igualdad con respecto a la variable x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z(x, y))\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z(x, y))\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z(x, y))\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = 0 \ \forall (x, y) \in I_{(x_0,y_0)}$$

Despejando $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$ se obtiene:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z(x, y)} \ \forall (x, y) \in I_{(x_0,y_0)}$$

Haciendo lo mismo para la variable y tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z(x, y))\frac{dx}{dy} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z(x, y))\frac{dy}{dy} + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z(x, y))\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = 0 \ \forall (x, y) \in I_{(x_0,y_0)}$$

Despejando $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$ se obtiene:

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z(x,y)} \ \forall (x,y) \in I_{(x_0,y_0)}$$

b) Definiendo:

$$f(x,y,z) = zx^3 - z^3yx$$

vemos si se cumplen las hipótesis del teorema de la función implícita:

- $f(1,1,1) = 1\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 1 = 0$
- $f \in C^1$, por ser composición de funciones continuamente diferenciables en $\mathbb{R}^3$
- $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = x^3 - 3z^2xy$ y $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = 1\cdot 1 - 3\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = -2 \neq 0$

Por tanto, $\exists I_{(1,1)}, V_1$ vecindades de $(1,1)$ y 1 respectivamente, y una única función $z(x,y) : I_{(1,1)} \to V_1$, $z(x,y) \in C^1$ tal que:

$$f(x,y,z(x,y)) = 0, \ \forall x \in I_{(1,1)}$$

Además por la parte a):

$$\tfrac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\tfrac{3zx^2 - z^3y}{x^3 - 3z^2xy} \ \forall x \in I_{(1,1)}$$

$$\tfrac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -\tfrac{-z^3x}{x^3 - 3z^2xy} \ \forall x \in I_{(1,1)}$$

c) **[Propuesto]**

P3. (Teorema de la función implícita en dos ecuaciónes con tres incógnitas)

a) Considere un campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z)) \in C^1$ tal que para algún punto (x_0,y_0,z_0) se cumple el teorema de la función implícita. Entonces se tiene un intervalo $I_{x_0} \subset \mathbb{R}$ centrado en un punto x_0 y dos únicas funciónes $z(x), y(x) \in C^1$ en I_{x_0} tal que:

$$\vec{F}(x, y(x), z(x)) = \vec{0}, \ \forall x \in I_{x_0}$$

Obtenga $z'(x)$ y $y'(x)$ usando regla de la cadena.

b) Considere las ecuaciones:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$
$$x^2 + y^2 - y = 0$$

Ocupando el TFI en un entorno del punto $(x,y,z) = (0,0,1)$, vea si se puede definir implícitamente a las variables z e y en función de x. Luego ocupe la parte i) para encontrar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial y}{\partial x}$ según el teorema.

Solución:

a) Usando regla de la cadena sobre la última igualdad se obtienen dos igualdades correspondientes a las funciones componentes de $\vec{F}$:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y(x),z(x))\frac{dx}{dx}+\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y(x),z(x))\frac{dy}{dx}(x)+\frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y(x),z(x))\frac{dz}{dx}(x)=0\ \forall x\in I_{x_0}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y(x),z(x))\frac{dx}{dx}+\frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y(x),z(x))\frac{dy}{dx}(x)+\frac{\partial F_2}{\partial z}(x,y(x),z(x))\frac{dz}{dx}(x)=0\ \forall x\in I_{x_0}$$

y en forma compacta lo anterior se reescribe como:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y'(x) \\ z'(x) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{pmatrix}\ \forall x\in I_{x_0}$$

Por tanto si se cumple el teorema de la función implícita se tiene que:

$$\begin{pmatrix} y'(x) \\ z'(x) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{pmatrix}\ \forall x\in I_{x_0}$$

Aplicando el método de la traspuesta de la adjunta, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} y'(x) \\ z'(x) \end{pmatrix} = -\frac{1}{\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial z}-\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial F_2}{\partial y}}\begin{pmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial z} & -\frac{\partial F_1}{\partial z} \\ -\frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{pmatrix}\ \forall x\in I_{x_0}$$

b) Definiendo:

$$\vec{F}(x,y,z)=\begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2-1 \\ x^2+y^2-y \end{pmatrix}$$

vemos si se cumplen las hipótesis del teorema de la función implícita:

- $\vec{F}(0,0,1)=\begin{pmatrix} 0+0+1-1 \\ 0+0-0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\vec{F}\in C^1$, dado que sus funciones componentes están compuestas de funciones continuamente diferenciables en $\mathbb{R}^3$
- Vemos si el jacobiano de la función $\vec{F}$ con respecto a las variables que se quieren despejar, en este caso z e y, es invertible en el punto $(0,0,1)$ (si tiene determinante distinto de cero)

$$J_{\vec{F}_{yz}}=\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2y & 2z \\ 2y-1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$|J_{\vec{F}_{yz}}|=\left|\begin{pmatrix} 2y & 2z \\ 2y-1 & 0 \end{pmatrix}\right|=-(4yz-2z)$$

y:

$$|J_{\vec{F}_{yz}}(0,0,1)| = 2 \neq 0$$

Por tanto, $\exists I_0, V_{(0,1)}$ vecindades de 0 y $(0,1)$ respectivamente, y una única función $\vec{\varphi}(x) : I_0 \to V_{(0,1)}$, $\vec{\varphi}(x) \in C^1$ tal que:

$$\vec{F}(x, \vec{\varphi}(x)) = 0, \ \forall x \in I_0 \text{ con } \vec{\varphi}(x) = (y(x), z(x))$$

Además por la parte a):

$$J_{\vec{\varphi}}(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ z'(x) \end{pmatrix} = -\tfrac{1}{2z-4yz} \begin{pmatrix} 0 & -2z \\ -(2y-1) & 2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ 2x \end{pmatrix} \ \forall x \in I_0$$

P4. (Teorema de la función implícita en dos ecuaciónes con cuatro incógnitas)

a) Considere un campo vectorial $\vec{F}(x,y,z,w) = (F_1(x,y,z,w), F_2(x,y,z,w)) \in C^1$ tal que para algún punto (x_0,y_0,z_0,w_0) se cumple el teorema de la función implícita. Entonces se tiene un intervalo $I_{(x_0,y_0)} \subset \mathbb{R}^2$ centrado en un punto (x_0,y_0) y dos únicas funciónes $z(x,y), w(x,y) \in C^1$ en $I_{(x_0,y_0)}$ tal que:

$$\vec{F}(x,y,z(x,y),w(x,y)) = \vec{0}, \ \forall (x,y) \in I_{(x_0,y_0)}$$

Obtenga $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$,$\frac{\partial w}{\partial x}$ y $\frac{\partial w}{\partial y}$ usando regla de la cadena.

b) Considere las ecuaciones:

$$\begin{aligned} xz^3 + 2xy + y^2w^2 &= 0 \\ xywz &= 1 \end{aligned}$$

Ocupando el TFI en un entorno del punto $(x,y,z,w) = (-1,1,-1,1)$, vea si se puede definir implícitamente a las variables z y w en función de (x,y). Luego ocupe la parte a) para encontrar $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$ y $\frac{\partial w}{\partial y}$ según el teorema.

c) Para el mismo sistema de ecuaciones de la parte anterior, usando el TFI vea si es posible definir implícitamente a las variables:

- x e y en función de (z,w). Si es así, encuentre $\frac{\partial x}{\partial z}$, $\frac{\partial x}{\partial w}$, $\frac{\partial y}{\partial z}$ y $\frac{\partial y}{\partial x}$ según el teorema.
- x e z en función de (y,w). Si es así, encuentre $\frac{\partial x}{\partial y}$, $\frac{\partial x}{\partial w}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ y $\frac{\partial z}{\partial w}$ según el teorema.
- x e w en función de (z,y). Si es así, encuentre $\frac{\partial x}{\partial z}$, $\frac{\partial x}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$ y $\frac{\partial w}{\partial y}$ según el teorema.
- z e y en función de (x,w). Si es así, encuentre $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial w}$, $\frac{\partial y}{\partial x}$ y $\frac{\partial y}{\partial w}$ según el teorema.
- w e y en función de (z,x). Si es así, encuentre $\frac{\partial w}{\partial z}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial y}{\partial z}$ y $\frac{\partial y}{\partial x}$ según el teorema.

Solución:

a) Usando regla de la cadena sobre la última igualdad con respecto a la variable x se obtienen dos igualdades correspondientes a las funciones componentes de $\vec{F}$:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \ \forall x \in I_{(x_0,y_0)}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \ \forall x \in I_{(x_0,y_0)}$$

y en forma compacta lo anterior se reescribe como:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial w} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{pmatrix} \ \forall x \in I_{(x_0,y_0)}$$

Por tanto si se cumple el teorema de la función implícita se tiene que:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial w} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial w} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{pmatrix} \ \forall x \in I_{(x_0,y_0)}$$

Aplicando el método de la traspuesta de la adjunta, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \end{pmatrix} = - \frac{1}{\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial F_2}{\partial w} - \frac{\partial F_1}{\partial w}\frac{\partial F_2}{\partial z}} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial w} & -\frac{\partial F_1}{\partial w} \\ -\frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{pmatrix} \ \forall x \in I_{(x_0,y_0)}$$

Si derivamos la igualdad con respecto a la variable y el procedimiento se repite y se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} = - \frac{1}{\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial F_2}{\partial w} - \frac{\partial F_1}{\partial w}\frac{\partial F_2}{\partial z}} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial w} & -\frac{\partial F_1}{\partial w} \\ -\frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} \ \forall x \in I_{(x_0,y_0)}$$

b) Definiendo:

$$\vec{F}(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} xz^3 + 2xy + y^2w^2 \\ xyzw - 1 \end{pmatrix}$$

vemos si se cumplen las hipótesis del teorema de la función implícita:

- $\vec{F}(-1,1-1,1) = \begin{pmatrix} (-1)\cdot(-1)\cdot{}+2\cdot(-1)\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ (-1)\cdot 1\cdot(-1)\cdot 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\vec{F} \in C^1$, dado que sus funciones componentes están compuestas de funciones continuamente diferenciables en $\mathbb{R}^4$
- Vemos si el jacobiano de la función $\vec{F}$ con respecto a las variables que se quieren despejar, en este caso z y w, es invertible en el punto $(-1,1,-1,1)$ (si tiene determinante distinto de cero)

$$J_{\vec{F}_{zw}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial w} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3xz^2 & 2wy^2 \\ xyw & xyz \end{pmatrix}$$

Luego:

$$|J_{\vec{F}_{zw}}| = \left| \begin{pmatrix} 3xz^2 & 2wy^2 \\ xyw & xyz \end{pmatrix} \right| = 3xz^2 \cdot xyz - 2wy^2 \cdot xyw$$

y:

$$|J_{\vec{F}_{zw}}(-1,1,-1,1)| = 3\cdot(-1)\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 1\cdot(-1) = -1 \neq 0$$

Por tanto, $\exists I_{(-1,1)}, V_{(-1,1)}$ vecindades de $(-1,1)$ y $(-1,1)$ respectivamente, y una única función $\vec{\varphi}(x) : I_{(-1,1)} \to V_{(-1,1)}$, $\vec{\varphi}(x) \in C^1$ tal que:

$$\vec{F}(x,y,\vec{\varphi}(x,y)) = \vec{0},\ \forall (x,y) \in I_{(-1,1)} \text{ con } \vec{\varphi}(x,y) = (z(x,y), w(x,y))$$

Además por la parte a):

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3xz^2\cdot xyz - 2wy^2\cdot xyw}\begin{pmatrix} xyz & -2wy^2 \\ -xyw & 3xz^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z^3+2y \\ yzw \end{pmatrix} \ \forall (x,y) \in I_{(-1,1)}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3xz^2\cdot xyz - 2wy^2\cdot xyw}\begin{pmatrix} xyz & -2wy^2 \\ -xyw & 3xz^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2x+2yw^2 \\ xzw \end{pmatrix} \ \forall (x,y) \in I_{(-1,1)}$$

De forma compacta $\forall (x,y) \in I_{(-1,1)}$:

$$J_{\vec{\varphi}}(x,y) = -\frac{1}{3xz^2\cdot xyz - 2wy^2\cdot xyw}\begin{pmatrix} xyz & -2wy^2 \\ -xyw & 3xz^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z^3+2y & 2x+2yw^2 \\ yzw & xzw \end{pmatrix}$$

Notamos que esto es:

$$J_{\vec{\varphi}}(x,y) = -[J_{\vec{F}_{zw}}(x,y,z,w)]^{-1}\cdot J_{\vec{F}_{xy}}(x,y,z,w)\ \forall (x,y) \in I_{(-1,1)}$$

Que es la fórmula que se aprende en el curso para determinar el jacobiano de la función implícita. Se debe notar que con esto se generaliza las derivadas de un función implícita y esperamos que use esta fórmula, ya que si se realizaron los anteriores problemas usted ya la dedujo usando regla de la cadena.

Los otros casos quedan **[Propuestos]**.

P5. **[Propuesto]** (Teorema de la función implícita en dos ecuaciones con cinco incógnitas)

a) Considere un campo vectorial $\vec{F}(x,y,z,u,v) = (F_1(x,y,z,u,v), F_2(x,y,z,u,v)) \in C^1$ tal que para algún punto (x_0,y_0,z_0,u_0,v_0) se cumple el teorema de la función implícita. Entonces se tiene un intervalo $I \subset \mathbb{R}^3$ centrado en un punto (x_0,y_0,z_0) y dos únicas funciones $u(x,y,z), v(x,y,z) \in C^1$ en I tal que:

$$\vec{F}(x,y,z,u(x,y,z),v(x,y,z)) = \vec{0},\ \forall (x,y,z) \in I$$

Obtenga $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$,$\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial v}{\partial z}$ usando regla de la cadena.

b) Considere las ecuaciones:

$$\begin{aligned} u+v+x^2-y^2+z^2 &= 0 \\ v^2+u^2+u-2xyz &= 0 \end{aligned}$$

Ocupando el TFI en un entorno del punto $(x, y, z, u, v) = (0, 0, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ vea si se puede definir implícitamente a las variables u y v en función de (x, y, z). Luego ocupe la parte a) para encontrar $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial v}{\partial z}$ según el teorema.

Obs: Debe darse cuenta que los ejercicios anteriores se extienden mucho mas, tanto en ecuaciones como en incógnitas.

P6. **[Propuesto]** Mostrar que las ecuaciones:

$$x^2 - y^2 - u^3 + v + 3 = 0$$

$$2xy + y^2 - 2u + \frac{u^4}{4} - \frac{5}{4} = 0$$

Determinan funciones $u(x, y)$, $v(x, y)$ definidas para (x, y) cerca de $(x, y) = (1, 1)$ y tales que $u(1, 1) = 1$ y $v(1, 1) = -2$. Calcular $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ en $(1, 1)$.

P7. **[Propuesto]** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^3$. Para cada x defina $g_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g_x(y) = f(x, y)$. Suponga que para cada x existe un único y tal que $g'_x(y) = 0$. Si se denota por $c(x)$ tal y, demuestre que:

i) Si $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \neq 0$ para todo (x, y), entonces $c(x)$ es diferenciable y

$$c'(x) = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, c(x))}{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, c(x))}$$

Indicación: $g'_x(y) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$

ii) Si $c'(x) = 0$, entonces existe un $\overline{y}$ tal que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, \overline{y}) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, \overline{y}) = 0$

P8. **[Propuesto]** Sea $G(x, y, z)$ una función de clase $C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ tal que $G(1, 0, 1) = 0$ y

$$\nabla G(1, 0, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathcal{H}_G(1, 0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Muestre que existe un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ que contiene al punto $(1, 0)$ y una funcin $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $C^2(U)$ tal que

$$f(1, 0) = 1 \quad \text{y} \quad G(x, y, f(x, y)) = 0 \ \forall (x, y) \in U$$

Calcule $\mathcal{H}_f(1, 0)$.

4.2 Recta tangente, plano tangente y recta normal

P1. a) Probar que el sistema

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 1$$
$$e^{xy} + x^2 - z^2 = 1$$

define dos funciones implícitas $y = y(x)$, $z = z(x)$ en un entorno del punto $(x, y, z) = (2, 0, 2)$.

b) Sea α la curva parmetrizada por $\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$. Hallar el vector tangente a α en el punto $x = 2$.

Solución:

a) Tomamos la función $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 - 1 \\ e^{xy} + x^2 - z^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Verificamos las hipótesis del TFI:

- $F(2, 0, 2) = \vec{0}$
- $J_{\vec{F}_{y,z}} = \begin{pmatrix} 2(y-1) & 2(z-2) \\ xe^{xy} & -2z \end{pmatrix}$

  luego:

$$|J_{\vec{F}_{y,z}}(2, 0, 2)| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

Por lo tanto, por el TFI se tiene que existe un entorno del punto $(2, 0, 2)$ en el que se pueden definir las funciones $y = y(x)$ y $z = z(x)$ diferenciables tales que $y(2) = 0$ y $z(2) = 2$ y verifican el sistema.

b) Si $\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$ es la curva definida por el sistema, entonces su vector tangente en $x = 2$ está dado por $(1, y'(2), z'(2))$. $y'(2)$ y $z'(2)$ se calculan con el TFI:

$$\begin{pmatrix} y'(2) \\ z'(2) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente el vector tangente a la curva definida por α en el punto $x = 2$ es $(1, 0, 1)$.

P2. a) Probar que el sistema:

$$y^2 + z^2 - x^2 + 4 = 0$$
$$e^{y-1} + x - z^2 = 0$$

define dos funciones implícitas $y = y(x)$, $z = z(x)$ en un entorno del punto $(x, y, z) = (3, 1, 2)$.

b) Sea α la curva parametrizada por $\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$, calcular la recta tangente y el plano normal a $\alpha(x)$ en el punto $x = 3$.

Solución:

a) Definimos:

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y^2 + z^2 - x^2 + 4 \\ e^{y-1} + x - z^2 \end{pmatrix}$$

- $\vec{F}(3, 1, 2) = \begin{pmatrix} 1 + 4 - 9 + 4 \\ e^{1-1} + 3 - 4 \end{pmatrix}$
- $\vec{F} \in C^1$ por ser composición de funciones continuamente diferenciables.
- $J_{\vec{F}_{xy}} = \begin{pmatrix} 2y & 2z \\ e^{y-1} & -2z \end{pmatrix}$

  Luego:

  $$|J_{\vec{F}_{xy}}| = \left| \begin{pmatrix} 2y & 2z \\ e^{y-1} & -2z \end{pmatrix} \right| = -4yz - 2ze^{y-1}$$

  y

  $$|J_{\vec{F}_{xy}}(3, 1, 2)| = -8 - 4 = -12 \neq 0$$

Por tanto, $\exists I_3, V_{(1,2)}$ vecindades de 3 y $(1, 2)$ respectivamente, y una única función $\vec{\varphi}(x) : I_3 \to V_{(1,2)}$, $\vec{\varphi}(x) \in C^1$ tal que:

$$\vec{F}(x, \vec{\varphi}(x)) = 0, \ \forall x \in I_3 \text{ con } \vec{\varphi}(x) = (y(x), z(x))$$

y además:

$$J_{\vec{\varphi}}(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ z'(x) \end{pmatrix} = -\frac{1}{-4yz - 2ze^{y-1}} \begin{pmatrix} 2y & 2z \\ e^{y-1} & -2z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x \\ 1 \end{pmatrix} \ \forall x \in I_3$$

b) Definimos:

$$\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$$

la curva que intersecta las dos superficies. Para la ecuación de una recta tangente se necesita un punto y un vector director $\vec{d}$ que sea tangente a la curva en $x = 3$, la derivada de la curva en ese punto representa un vector tangente. Dicho eso:

$$\vec{d} = \alpha'(3) = (1, y'(3), z'(3)) = (1, \tfrac{5}{3}, \tfrac{2}{3})$$

luego la recta tangente queda descrita por:

$$(x, y, z) = L_{tangente}(\lambda) = (3, 1, 2) + \lambda(1, \tfrac{5}{3}, \tfrac{2}{3})$$

con λ un parámetro real. Equivalentemente:

$$x - 3 = \frac{y-1}{\frac{5}{3}} = \frac{z-2}{\frac{2}{3}}$$

Para encontrar el plano normal en $x = 3$, se necesita un vector normal $\hat{n}$ a la curva en ese punto. Es fácil darse cuenta que este vector $\hat{n} = \vec{d}$ (puede imaginar que la curva atraviesa perpendicularmente este plano en $x = 3$). La ecuación del plano normal queda dada por:

$$\langle \hat{n}, \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \\ z-2 \end{pmatrix} \rangle = 0$$

$$\langle \vec{d}, \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \\ z-2 \end{pmatrix} \rangle = 0$$

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \\ z-2 \end{pmatrix} \rangle = 0$$

$$x - 1 + \tfrac{5}{3}(y-1) + \tfrac{2}{3}(z-2) = 0$$

P3. [Propuesto]

a) Probar que el sistema de ecuaciones:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$
$$xy + z = 0$$

define implícitamente $x = x(z)$, $y = y(z)$ en el entorno de $(x, y, z) = (2, 1, -2)$.

b) Si $\alpha(z) = (x(z), y(z), z)$ denota la curva definida por el sistema anterior, calcular la recta tangente y el plano normal a α en $z = -2$.

P4. [Propuesto]

a) Probar que la ecuación:

$$x^2y - y^2x + z^2\cos(xz) = 1$$

define una función implícita $z = z(x, y)$ en un entorno del punto $(x, y, z) = (0, \sqrt{2}, 1)$.

b) Hallar el plano tangente a la superficie $z(x, y)$ en el punto $(x, y) = (0, \sqrt{2})$.

5 Teorema de la función inversa

P1. [**Propuesto**] Un profesor del curso MA2001 esta enunciando el teorema de la función inversa local como sigue:

Teorema: *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 en un abierto $S \subset \mathbb{R}^n$, y sea a un punto de S tal que $J_f(a)$ es invertible. Entonces existen dos conjuntos abiertos $A \subset S$ y $B \subset f(S)$ y una función $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tales que*

1) $a \in A$ y $f(a) \in B$

2) $A = f^{-1}(B)$

3) f es 1-1 en A (o inyectiva en A)

4) $g(B) = A$ y $g(f(x)) = x$, $\forall x \in A$

Un alumno realiza la siguiente premisa:

Dado que el teorema funciona localmente para un conjunto abierto $S \subset \mathbb{R}^n$ tal que en un punto $a \in S$, $J_f(a)$ es invertible. Si aseguro que $J_f(a)$ es invertible $\forall a \in S$ entonces podría obtener una versión el teorema de la función inversa global.

Otro alumno le dice que esta equivocado, pues acaba de encontrar un contraejemplo. El dice que $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$\vec{F}(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$$

no cumple su premisa en $S = \mathbb{R}^2$.

¿Quién tiene la razón?. Justifique.

P2. a) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$T(u, v, w) = (2v^2 - u^2, uv, w + 1)$$

Muestre que T posee inversa local en torno a cualquier punto en el conjunto:

$$A = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u, v \neq 0\}$$

Encuentre Además $J_{T^{-1}}$ para esos puntos.

b) Considere $u, v > 0$ y aproxime el comportamiento funcional de T^{-1} en un entorno del punto $(1, 1, 1)$.

Solución:

a) Verificamos las hipótesis del TFInv:

1) $T \in C^1$ en su dominio.

2) $|J_T|(u,v,w) = \left|\begin{pmatrix} -2u & 4v & 0 \\ v & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = -2u^2 - 4v^2$

Este determinante es cero si $u = v = 0$

Luego, es posible aplicar el TFInv localmente a puntos que esten en el conjunto A. Aplicando el teorema encontramos:

$$J_{T^{-1}}(u,v,w) = \tfrac{1}{-2u^2-4v^2}\begin{pmatrix} u & -4v & 0 \\ -v & -2u & 0 \\ 0 & 0 & -2u^2-4v^2 \end{pmatrix}$$

b) Usaremos la aproximación de taylor de primer orden para T^{-1}, es decir, encontraremos:

$$\mathcal{T}_{T^{-1}_{(1,1,1)}}(x,y,z) = T^{-1}(1,1,1) + J_{T^{-1}}(1,1,1) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

donde (x,y,z) son las nuevas coordenadas que se aplican en el espacio donde se aplica T^{-1}, es decir, $T^{-1}(x,y,z) = (u,v,w)$ y $T(u,v,w) = (x,y,z)$ para el dominio donde se puede aplicar localmente el TFInv. Dicho esto, como tenemos expresado $J_{T^{-1}}$ en función de (u,v,w) necesitamos (u_0,v_0,w_0) asociado a $T^{-1}(1,1,1)$. Ese punto lo encontraremos resolviendo el sistema:

$$T(u,v,w) = (2v^2 - u^2, uv, w+1)(1,1,1)$$

de donde se obtiene que $(u_0,v_0,w_0) = (1,1,0)$. Con esto:

$$\mathcal{T}_{T^{-1}_{(1,1,1)}}(x,y,z) = T^{-1}(1,1,1) + [J_T(1,1,0)]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{T}_{T^{-1}_{(1,1,1)}}(x,y,z) = (1,1,0) - \tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

P3. Considere la transformación definida por:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ x+2y+y^2 \end{pmatrix} \text{ con } \begin{cases} -\infty < x < \infty \\ -\infty < y < \infty \end{cases}$$

i) Determine todos los puntos (x,y) en los que el teorema de la función inversa garantiza la existencia de una inversa local diferenciable de forma que $x = x(u,v)$ e $y = y(u,v)$. Calcule $\frac{\partial y}{\partial v}$ y $\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u}$ sin despejar explícitamente.

ii) Encuentre explícitamente la inversa local $x = x(u,v)$ e $y = y(u,v)$ en una vecindad del punto $(1,-2)$ y calcule nuevamente $\frac{\partial y}{\partial v}$.

Solución:

i) Consideramos $T(x,y) = (x, x+2y+y^2)$. Para que se cumpla el TFinv necesitamos que la transformación sea C^1 y determinante del jacobiano sea distinto de 0. Vemos que $T \in C^1$ y su determinante es:

$$J_T(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2(1+y) \end{pmatrix} \Rightarrow |J_T(x,y)| = 2(1+y) \iff y \neq -1$$

Para calcular las derivadas parciales pedidas usamos el TFinv:

$$J_T^{-1}(T(x,y)) = [J_T(x,y)]^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2(1+y) \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2(1+y)} \begin{pmatrix} 2(1+y) & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

De aquí queda que $\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{2(1+y)}$. Para calcular la otra derivada notemos que

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u} = \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$$

Usando lo anterior podemos calcuar dichas derviadas:

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{-1}{2(1+y)} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial v} \frac{-1}{2(1+y)} = \frac{\frac{\partial y}{\partial v}}{2(1+y)^2} = \frac{1}{4(1+y)^3}$$

ii) Tenemos $x = u$ y $x + 2y + y^2 = v \Rightarrow y = -1 \pm \sqrt{1-(u-v)}$. De las dos soluciones tomamos la que posee un menos, pues estamos trabajando en una vecindad de -2, es decir, $y = -1 - \sqrt{1+v-u}$. Luego podemos calcular la derivada pedida:

$$\frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{1}{2\sqrt{1+v-u}} = \frac{1}{2(y+1)}$$

P4. Considere la transformación definida por:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x} \\ x^2+y^2 \end{pmatrix} \text{ con } \begin{cases} 0 < x < \infty \\ 0 < y < \infty \end{cases}$$

i) Suponiendo que esta transformación es inyectiva calcule J_T y $J_{T^{-1}}$ según el teorema de la función inversa.

ii) Calcular analíticamente y comprobar que su jacobiano coincide con $J_{T^{-1}}$ encontrado en la parte anterior.

Solución:

i) Consideramos $T(x,y) = (\frac{y}{x}, x^2+y^2)$. Para que se cumpla el TFinv necesitamos que la transformación sea C^1 y determinante del jacobiano sea distinto de 0. Vemos que $T \in C^1$ y su determinante es:

$$J_T(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 2x & 2y \end{pmatrix} \Rightarrow |J_T(x,y)| = -2\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)$$

Este determinante no sea anula para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Para $J_{T^{-1}}$ usamos el TFinv:

$$J_T^{-1}(T(x,y)) = [J_T(x,y)]^{-1} \Rightarrow \frac{-1}{2\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)} \begin{pmatrix} 2y & -\frac{1}{x} \\ -2x & -\frac{y}{x^2} \end{pmatrix}$$

ii) Analíticamente se encuentra $x = \sqrt{\frac{v}{1+u^2}}$ e $y = u\sqrt{\frac{v}{1+u^2}}$. Encontramos $J_{T^{-1}}$:

$$J_{T^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{\frac{v}{1+u^2}}} \cdot \frac{(-v)}{(1+u^2)^2} \cdot 2u & \frac{1}{2\sqrt{\frac{v}{1+u^2}}} \cdot \frac{1}{1+u^2} \\ \sqrt{\frac{v}{1+u^2}} + \frac{u}{2\sqrt{\frac{v}{1+u^2}}} \cdot \frac{(-v)}{(1+u^2)^2} \cdot 2u & \frac{u}{2\sqrt{\frac{v}{1+u^2}}} \cdot \frac{1}{1+u^2} \end{pmatrix}$$

$$J_{T^{-1}}(x(u,v), y(u,v)) = \frac{-1}{2(1+u^2)} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{v}{1+u^2}} \cdot 2u & -\sqrt{\frac{1+u^2}{v}} \\ -2\sqrt{\frac{v}{1+u^2}} & -u\sqrt{\frac{1+u^2}{v}} \end{pmatrix}$$

Que es el mismo determinante encontrado en la parte anterior en función de u y v

P5. Las **coordenadas polares** en $\mathbb{R}^2$ se definen por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}, \text{ con } \left\{ \begin{array}{l} 0 < r < \infty \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{array} \right.$$

i) Pruebe que esta transformación es inyectiva y calcule J_T y $J_{T^{-1}}$ según el Teorema de la Función Inversa, en los puntos donde exista.

ii) Calcular T^{-1} analíticamente y comprobar que su jacobiano coincide con el $J_{T^{-1}}$ encontrado en la parte anterior.

Solución:

i) Probemos la inyectividad. Debemos comprobar que $\forall (r_1,\theta_1),(r_2,\theta_2) \in (0,\infty)\times[0,2\pi)$. Si $T(r_1,\theta_1) = T(r_2,\theta_2)$ entonces $r_1 = r_2$ y $\theta_1 = \theta_2$. En efecto si:

$$T(r_1,\theta_1) = T(r_2,\theta_2)$$

es equivalente a:

$$r_1\cos(\theta_1) = r_2\cos(\theta_2) \text{ y } r_1\sin(\theta_1) = r_2\sin(\theta_2)$$

Elevando al cuadrado y sumando estas dos últimas expresiones se tiene que $r_1 = r_2$. Pero entonces, con esto se deduce que $\cos(\theta_1) = \cos(\theta_2)$ y $\sin(\theta_1) = \sin(\theta_2)$ y el par $(\cos(\theta),\sin(\theta))$ es inyectivo en $[0,2\pi)$. Demostremos esto último:

Dado que $\cos(\theta_1) = \cos(\theta_2)$ y $\sin(\theta_1) = \sin(\theta_2)$. Multiplicando la primera igualdad por $\cos(\theta_1)$ y la segunda por $\sin(\theta_1)$ se obtiene que:

$$\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) = \sin(\theta_2)\cos(\theta_1)$$

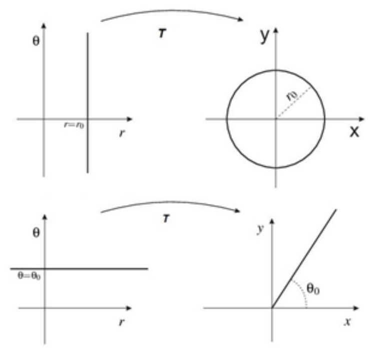
Usando una igualdad trigonométrica se tiene que:

$$\sin(\theta_1 - \theta_2) = 0 \Longleftrightarrow \theta_1 - \theta_2 = 0 \text{ o } \theta_1 - \theta_2 = \pi$$

pero si $\theta_1 - \theta_2 = \pi$ entonces se cumpliría que:

$$\sin(\theta_1) = -\sin(\theta_2)$$

y de lo anterior sabiamos que $\sin(\theta_1) = \sin(\theta_2)$, por lo que $\theta_1 - \theta_2 = 0$ lo que implica que $\theta_1 = \theta_2$, por lo que T es inyectiva en $[0,2\pi)$. Luego hay una correspondencia que se representa gráficamente:



Además esta función es diferenciable para el dominio establecido. Veamos en que puntos su jacobiano es invertible:

$$J_T(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

y

$$|J_T(r,\theta)| = \left| \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} \right| = |r|$$

y $r > 0$, por lo que el jacobiano es invertible en el dominio estipulado. Con esto, utilizamos el TFInv y:

$$J_{T^{-1}}(r,\theta) = [J_T(r,\theta)]^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta & r\cos(\theta) \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r\cos(\theta) & r\sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

ii) Analíticamente se encuentra:

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = T^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{pmatrix} \text{ para } (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

Obteniendo el jacobiano de esta transformación inversa encontramos que:

$$J_{T^{-1}}(r(x,y),\theta(x,y)) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

$$J_{T^{-1}}(r(x,y),\theta(x,y)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x & y \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$$

Que es el mismo jacobiano encontrado en la parte anterior en función de (x,y)

P6. [Propuesto] Las **coordenadas elípticas** en $\mathbb{R}^2$ se definen por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T(r,\theta) = \begin{pmatrix} ar\cos(\theta) \\ br\sin(\theta) \end{pmatrix}, \text{ con } \begin{cases} 0 < r < \infty \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases} \text{ y } a, b > 0$$

i) Pruebe que esta transformación es inyectiva y calcule J_T y $J_{T^{-1}}$ según el Teorema de la Función Inversa, en los puntos donde exista.

ii) Calcular T^{-1} analíticamente y comprobar que su jacobiano coincide con el $J_{T^{-1}}$ encontrado en la parte anterior.

P7. [Propuesto] Las **coordenadas elípticas** en $\mathbb{R}^3$ se definen por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} ar\sin(\theta)\cos(\phi) \\ br\sin(\theta)\sin(\phi) \\ cr\cos(\theta) \end{pmatrix}, \text{ con } \begin{cases} 0 < r < \infty \\ 0 < \theta < \pi \\ 0 \leq \phi < 2\pi \end{cases} \text{ y } a, b, c > 0$$

i) Pruebe que esta transformación es inyectiva y calcule J_T y $J_{T^{-1}}$ según el Teorema de la Función Inversa, en los puntos donde exista.

ii) Calcular T^{-1} analíticamente y comprobar que su jacobiano coincide con el $J_{T^{-1}}$ encontrado en la parte anterior.

P8. [Propuesto] Las **coordenadas cilíndricas** en $\mathbb{R}^3$ se definen por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \\ z \end{pmatrix}, \text{ con } \begin{cases} 0 < r < \infty \\ 0 < \theta < 2\pi \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

i) Pruebe que esta transformación es inyectiva y calcule J_T y $J_{T^{-1}}$ según el Teorema de la Función Inversa, en los puntos donde exista.

ii) Calcular T^{-1} analíticamente y comprobar que su jacobiano coincide con el $J_{T^{-1}}$ encontrado en la parte anterior.

P9. [Propuesto] Las **coordenadas esféricas** en $\mathbb{R}^3$ se definen por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}, \text{ con } \begin{cases} 0 < r < \infty \\ 0 < \theta < \pi \\ 0 \leq \phi < 2\pi \end{cases}$$

i) Pruebe que esta transformación es inyectiva y calcule J_T y $J_{T^{-1}}$ según el Teorema de la Función Inversa, en los puntos donde exista.

ii) Calcular T^{-1} analíticamente y comprobar que su jacobiano coincide con el $J_{T^{-1}}$ encontrado en la parte anterior.

P10. [Propuesto] Las **coordenadas toroidales** en $\mathbb{R}^3$ se definen por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} (R_0 + r\sin(\theta))\cos(\phi) \\ (R_0 + r\sin(\theta))\sin(\phi) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}, \text{ con } \begin{cases} 0 < r < \infty \\ 0 < \theta < 2\pi \quad \text{y } R_0 > 0 \\ 0 \leq \phi < 2\pi \end{cases}$$

i) Pruebe que esta transformación es inyectiva y calcule J_T y $J_{T^{-1}}$ según el Teorema de la Función Inversa, en los puntos donde exista.

ii) Calcular T^{-1} analíticamente y comprobar que su jacobiano coincide con el $J_{T^{-1}}$ encontrado en la parte anterior.

P11. [Propuesto] Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciables y $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$\vec{F}(x,y,z) = (f(x,y,z), g(x,y,z), f(x,y,z) + g(x,y,z))$$

Pruebe que $\vec{F}$ no posee inversa diferenciable.

6 Optimización sin restricciones

P1. Determine los puntos críticos y clasifiquelos (máximos, mínimo, puntos sillas) en los siguientes casos:

i) $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 3y^2$

ii) $f(x, y) = (1 - x)(1 - y)(x + y - 1)$

iii) $f(x, y) = (2x + y)e^{-4x^2 - y^2}$

iv) $f(x, y) = xe^{-(x^2+y^2)} + ye^{-(x^2+y^2)}$

v) $f(x, y) = x \sin(y)$

vi) $f(x, y) = 3x^3 + y^2 - 9x - 6y + 1$

vii) $f(x, y) = (y - x)^2(x + y)$

viii) $f(x, y) = xye^{-(x^2+y^2)}$

Solución:

i) Encontremos los puntos críticos de esta función:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 8x^3 - 2x \\ 4y^3 - 6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x(4x^2 - 1) = 0 & (1) \\ y(2y^2 - 3) = 0 & (2) \end{cases}$$

Casos:

- $x = 0 \Rightarrow y = 0 \vee y = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$
  1) $(x, y) = (0, 0)$
  2) $(x, y) = (0, \sqrt{\frac{3}{2}})$
  3) $(x, y) = (0, -\sqrt{\frac{3}{2}})$
- $x \neq 0 \Rightarrow y = 0 \vee y = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ y de la primera ecuación:

  $$x = \pm\frac{1}{2}$$

  Con esto tenemos:
  1) $(x, y) = (\frac{1}{2}, 0)$
  2) $(x, y) = (-\frac{1}{2}, 0)$
  3) $(x, y) = (\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})$
  4) $(x, y) = (-\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})$
  5) $(x, y) = (\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}})$

6) $(x, y) = (-\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}})$

Luego, notamos que existen 9 puntos críticos, para caracterizar la naturaleza de cada uno, calculemos H_f.

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 24x^2 - 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 6 \end{pmatrix}$$

- $H_f(\pm\frac{1}{2}, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$.
  Subdeterminantes: $|H_1| = 4$, $|H_2| = -24 \Rightarrow (\frac{1}{2}, 0), (-\frac{1}{2}, 0)$ son puntos silla.

- $H_f(0, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$.
  Subdeterminantes: $|H_1| = -2$, $|H_2| = -24 \Rightarrow (0, \sqrt{\frac{3}{2}}), (0, -\sqrt{\frac{3}{2}})$ son puntos silla.

- $H_f(\pm\frac{1}{2}, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$.
  Subdeterminantes: $|H_1| = 6$, $|H_2| = 48 \Rightarrow (\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}), (\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}}), (-\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}), (-\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}})$ son mínimos locales.

- $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$
  Subdeterminantes: $|H_1| = -2$, $|H_2| = 12 \Rightarrow (0, 0)$ es máximo local.

ii) Encontremos los puntos críticos de esta función:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} (y-1)(2x+y-2) \\ (x-1)(2y+x-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} (y-1)(2x+y-2) = 0 & (1) \\ (x-1)(2y+x-2) = 0 & (2) \end{cases}$$

Casos:

- $x = 1 \Rightarrow y = 0 \vee y = 1$
  1) $(x, y) = (1, 0)$
  2) $(x, y) = (1, 1)$
- $x \neq 1 \Rightarrow y = 1 \vee y = 2x + y - 2$. Si $y = 1 \Rightarrow x = 0$. Si $y \neq 1$ se tiene el sistema:

$$2y + x - 2 = 0$$

$$2x + y - 2 = 0$$

que tiene solución $(x, y) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Entonces tenemos:

1) $(x, y) = (1, 0)$
2) $(x, y) = (1, 1)$
3) $(x, y) = (0, 1)$
4) $(x, y) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

Luego, notamos que existen 4 puntos críticos, para caracterizar la naturaleza de cada uno, calculemos H_f.

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2(y-1) & 2x + 2y - 3 \\ 2x + 2y - 3 & 2(x-1) \end{pmatrix}$$

- $H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
  Subdeterminantes: $|H_1| = -2$, $|H_2| = -1 \Rightarrow (1, 0)$ es punto silla

- $H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
  Subdeterminantes: $|H_1| = 0$, $|H_2| = -1 \Rightarrow (1, 1)$ es punto silla.

- $H_f(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.
  Subdeterminantes: $|H_1| = 0$, $|H_2| = -1 \Rightarrow (0, 1)$ es punto silla.

- $H_f(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}, \end{pmatrix}$
  Subdeterminantes: $|H_1| = -\frac{2}{3}$, $|H_2| = \frac{1}{3} \Rightarrow (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ es máximo local.

iii) Los demás apartados quedan **[Propuestos]**

P2. Determine la naturaleza de los puntos críticos de la función:

$$f(x,y) = (ax^2 + by^2)e^{-(x^2+y^2)} \qquad 0 < a < b$$

Solución:

Para conocer los puntos críticos necesitamos imponer $\nabla f(x,y) = \vec{0}$:

$$2xe^{-(x^2+y^2)}(a - ax^2 - by^2) = 0$$

$$2ye^{-(x^2+y^2)}(b - ax^2 - by^2) = 0$$

Lo primero que notamos es que si $x \neq 0 \wedge y \neq 0 \implies a = b \rightarrow\leftarrow$

Es claro que el $(0,0)$ es punto crítico

Si $x = 0 \implies y = \pm 1$
Si $y = 0 \implies x = \pm 1$

Por lo tanto habrán 5 puntos críticos, para determinar su naturaleza calculemos el Hessiano.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (2e^{-(x^2+y^2)} - 4x^2e^{-(x^2+y^2)})(a - ax^2 - by^2) - 4ax^2e^{-(x^2+y^2)}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4xye^{-(x^2+y^2)}(b - ax^2 - by^2) - 4axye^{-(x^2+y^2)}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (2e^{-(x^2+y^2)} - 4y^2e^{-(x^2+y^2)})(b - ax^2 - by^2) - 4by^2e^{-(x^2+y^2)}$$

- $H_f(0, \pm 1) = \begin{pmatrix} 2e^{-1}(a-b) & 0 \\ 0 & -4be^{-1} \end{pmatrix}$.
  Subdeterminantes: $|H_1| = 2e^{-1}(a-b) < 0$, $|H_2| = 2e^{-1}(b-a)4be^{-1} > 0$ por lo que los puntos son máximos local.

- $H_f(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} -4ae^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1}(b-a) \end{pmatrix}$.
  Subdeterminantes: $|H_1| = -4ae^{-1} < 0$, $|H_2| = 2e^{-1}(a-b)4ae^{-1} < 0$ por lo que los puntos son de silla.

- $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}$.
  Subdeterminantes: $|H_1| = 2a > 0$, $|H_2| = 4ab >$ por lo que el punto es un mínimo local.

Obs: Repita el problema en los casos $0 < b < a$, $a < b < 0$, $b < a < 0$ y $a = b$.

P3. Considere la función de distribución de probabilidad normal con parámetros μ y σ, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$. Sea $\{x_1, x_2, .., x_n\}$ un conjunto finito de números reales fijo. Se define la función de verosimilitud:

$$L(\mu,\sigma) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

El objetivo de este problema es encontrar los parámetros (μ^*, σ^*) que maximizan L. Encuentre además el valor de $L(\mu^*, \sigma^*)$.

Hint: En algunos problemas es conveniente usar aplicaciones crecientes que "mantenga" los valores extremos de una función objetivo. Dicho esto, considere la aplicación $ln(u)$ y apliquela sobre la función L. Encuentre el máximo valor que puede tomar L.

Solución:

Notemos que $L(\mu,\sigma) = (2\pi\sigma^2)^{\frac{-n}{2}} e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, aplicando ln obtenemos que:

$$l(\mu,\sigma) = \frac{-n}{2} ln(2\pi\sigma^2) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

Luego para analizar sus puntos críticos igualamos el gradiente de $l(\mu,\sigma)$ a 0.

$$\frac{\partial l(\mu,\sigma)}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)}{\sigma^2} = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\frac{\partial l(\mu,\sigma)}{\partial \sigma} = \frac{-n}{2\sigma} + \frac{1}{2\sigma^3} \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i-\hat{\mu})^2}{n}$$

Para justificar que el punto encontrado es máximo, calculemos $H_l(\mu,\sigma)$:

$$H_l(\mu,\sigma) = \begin{pmatrix} \frac{-n}{\sigma^2} & -2\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)}{\sigma^3} \\ -2\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)}{\sigma^3} & \frac{n}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma 4} \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2 \end{pmatrix}$$

Es claro que el primer subdeterminante es negativo, el determinante total es:

$$\frac{-n^2}{\sigma^4} + \frac{3n}{\sigma^6}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 + \frac{4}{\sigma^6}(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu))^2$$

Luego al reemplazar en los valores óptimos se deduce que este término es positivo, por lo tanto el punto antes encontrado era máximos locales de $l(\mu,\sigma) \implies$ máximo locales de $L(\mu,\sigma)$

P4. Suponga que **se tienen** n puntos en el plano como resultado de observar dos variables en un conjunto de individuos, $(x_1,y_1),...,(x_n,y_n)$. Se desea hallar una función lineal o recta que se ajuste lo "mejor" posible al conjunto de observaciones. Dicha función debe ser descrita por:

$$y = mx + b$$

donde m, b son parámetros de la recta a determinar.

Como los puntos no están necesariamente sobre una recta, para cada (x_i,y_i) existe un error asociado e_i con $i \in \{1,...,n\}$, tal que:

$$y_i = mx_i + b + e_i,\ \forall i \in \{1,...,n\}$$

Los errores o residuos pueden ser positivos, negativos o nulos.

Una manera de determinar m y b es a través del **criterio denominado de mínimos cuadrados**, que se expresa como el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{ll} Min & \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \\ s.a. & y_i = mx_i + b + e_i \quad i \in \{1,...,n\} \end{array}$$

Se pide:

i) Transforme el problema anterior en un problema sin restricciones, ¿Cuáles son las incógnitas?

ii) Resuélva el problema sin restricciones y pruebe que se trata efectivamente de un mínimo. ¿Es global? ¿Es único?

Hint: Para un conjunto de datos X formado por los x_i, la varianza esta dada por $Var(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2$ y es siempre no negativa.

iii) ¿Qué condición impodría sobre los datos para que el problema anterior siempre tenga solución?

Solución:

i) Notamos que $e_i = y_i - mx_i - b \ \forall i = 1 : n$, con esto transformamos el problema a uno sin restricciones:

$$\text{Mín} \qquad \sum_{i=1}^{n}(y_i - mx_i - b)^2$$

Como se describe en el enunciado las incógnitas de este problema son m y b, pues (x_i, y_i) son conocidos.

ii) Aplicamos la condición de optimalidad de primer orden:

- $\frac{\partial}{\partial m}\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - mx_i - b)^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial m}[(y_i - mx_i - b)^2] = \sum_{i=1}^{n}2(y_i - mx_i - b)(-x_i) = 0$
- $\frac{\partial}{\partial b}\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - mx_i - b)^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial b}[(y_i - mx_i - b)^2] = \sum_{i=1}^{n}2(y_i - mx_i - b)(-1) = 0$

Con álgebra se obtienen la ecuación:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{pmatrix}$$

Para simplificar divimos todo por n obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \overline{x} \\ \overline{x} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\ \overline{y} \end{pmatrix}$$

Con $\overline{x}, \overline{y}$ los promedios de los respectivos datos. Así:

$$\begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \overline{x} \\ \overline{x} & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\ \overline{y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m^* \\ b^* \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2}\begin{pmatrix} 1 & -\overline{x} \\ -\overline{x} & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\ \overline{y} \end{pmatrix}$$

Obs: $Var(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2$ con X el conjunto de datos formado por los x_i. Comprobamos que (m^*, b^*) se trata de un mínimo, aplicamos la condición de optimalidad de segundo orden:

- $\frac{\partial}{\partial m}\left(\sum_{i=1}^{n} -2(y_i x_i - m x_i^2 - b x_i)\right) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2$
- $\frac{\partial}{\partial b}\left(\sum_{i=1}^{n} -2(y_i - m x_i - b)\right) = 2\sum_{i=1}^{n} 1 = 2n$
- $\frac{\partial}{\partial m}\left(\sum_{i=1}^{n} -2(y_i - m x_i - b)\right) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i$, es la derivada cruzada y $e_i(m,b)$ es C^2

Luego:

$$\mathcal{H}_{e_i(m,b)}(m,b) = \begin{pmatrix} 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 & 2\sum_{i=1}^{n} x_i \\ 2\sum_{i=1}^{n} x_i & 2n \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}_{e_i(m,b)}(m,b) = 2n \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}_{e_i(m,b)}(m,b) = 2n \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \overline{x} \\ \overline{x} & 1 \end{pmatrix}$$

$|\mathcal{H}_{e_i(m,b)}|_1 = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$ y tengamos en cuenta la propiedad del determinante $|\alpha A| = \alpha^k |A|$ donde k es la dimensión de la matriz A. Con esto, el segundo determinante es $|\mathcal{H}_{e_i(m,b)}|_2 = 4n^2 \cdot \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2\right) \geq 0$. Es obvio que queremos que $|\mathcal{H}_{e_i(m,b)}|_2 \neq 0$ y eso es lo que se deberá cumplir para que se tengan las condiciones de optimalidad para un mínimo.

Para la unicidad y globalidad de la optimalidad del punto (m^*, b^*) se puede argumentar que la función $e_i(m,b)$ es convexa sobre un dominio convexo y además el único candidato encontrado a óptimo es (m^*, b^*) (Esto se ver en el próximo capítulo). Por lo tanto, por propiedad de funciones convexas, este mínimo es global y único.

iii) La condición que se debe cumplir, la aplicamos a ciegas en el anterior apartado y es que la matriz:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \overline{x} \\ \overline{x} & 1 \end{pmatrix}$$

Tenga inversa, es decir, que su determinante sea distinto de cero:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2 \neq 0$$

Esta condición involucra que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ no sea igual promedio de los datos x_i, lo que en lenguaje de estadísticas es que la varianza de los x_i no sea nula.

P5. [Propuesto]

a) Considere la función de distribución de probabilidad exponencial con parámetro λ, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Donde $\lambda > 0$. Sea $\{x_1, x_2, .., x_n\}$ un conjunto finito de números reales fijo. Se define la función de verosimilitud:

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

El objetivo de este problema es encontrar el parámetro λ^* que maximiza L. Encuentre además el valor de $L(\lambda^*)$.

b) Considere la función de distribución de probabilidad poisson con parámetro θ, $P : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$P(x) = \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}$$

Donde $\theta > 0$. Sea $\{x_1, x_2, .., x_n\}$ un conjunto finito de números naturales fijo. Se define la función de verosimilitud:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

El objetivo de este problema es encontrar el parámetro θ^* que maximiza L. Encuentre además el valor de $L(\theta^*)$.

Hint: En algunos problemas es conveniente usar aplicaciones crecientes que "mantenga" los valores extremos de una función objetivo. Dicho esto, considere la aplicación $ln(u)$ y apliquela sobre la función L. Encuentre el máximo valor que puede tomar L.

P6. [Propuesto] Sea $f(x, y) = -ax^3 - 3bxy^2 + 15a^2x + 12y$. Encuentre los valores de los parámetros a y b tales que la función $f(x, y)$ tenga un máximo local en el punto $(2, 1)$. ¿Es un máximo global?

7 Optimización con restricciones de igualdad

P1. Determine los máximos y mínimos globales de la función

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - xy$$

sujeto a que $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{8} \leq 1$

Solución:

Primero veamos que el conjunto definido por:

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{8} \leq 1\}$$

Es compacto, por lo tanto si aplicamos f sobre este conjunto, por Weierstrass, se deberían alcanzar los extremos globales. Lo primero que haremos será analizar el interior del conjunto Q (desigualdad estricta) con las condiciones de optimalidad:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 4x - y \\ 2y - x \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 4x - y = 0 & (1) \\ 2y - x = 0 & (2) \\ 2z = 0 & (3) \end{cases}$$

De la última (3) sabemos que $z = 0$. En cuanto a las dos primeras ecuaciones tenemos el sistema:

$$\begin{cases} 4x - y = 0 & (1) \\ 2y - x = 0 & (2) \end{cases}$$

de donde $x = 0$ e $y = 0$. Vemos que este punto satisface la restricción estricta (Pertenece al interior del conjunto Q). El Hessiano de f es:

$$\mathcal{H}_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vemos los subdeterminantes:

$$\mathcal{H}_f(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

.

Subdeterminantes: $|H_1| = 4$, $|H_2| = 7$ y $|H_3| = 14 \Rightarrow (0, 0, 0)$ es un mínimo local.

Es posible notar que $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - xy \geq 0$, pues $x^2 + y^2 \geq 2xy \geq xy$, $\forall(x, y)$. por lo tanto $(x, y, z) = (0, 0, 0 =)$ es un mínimo global.

Ahora analizamos la frontera del conjunto Q (con la igualdad) con la técnica de los multiplicadores de lagrange. El lagrangeano asociado al problema es:

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = 2x^2 + y^2 + z^2 - xy - \lambda(\tfrac{x^2}{2} + \tfrac{y^2}{4} + \tfrac{z^2}{8} - 1)$$

Imponemos las condiciones de optimalidad:

1) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 4x - y - \lambda x = 0$
2) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y - x - \frac{\lambda y}{2} = 0$
3) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 2z - \frac{\lambda z}{4} = 0$
4) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{8} - 1 = 0$

de 3) podemos ver que:

$$8z - \lambda z = 0$$

$$z(8 - \lambda) = 0$$

Luego hay dos casos $z = 0$ o $\lambda = 8$:

$\boxed{z = 0}$ Se tiene el sistema:

$$\begin{cases} 4x - y - \lambda x = 0 & (1) \\ 2y - x - \frac{\lambda y}{2} = 0 & (2) \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

Multiplicando 1) por y y 2) por $2x$ y restando ambas igualdades se obtiene:

$$2x^2 = y^2$$

y reemplazando esto en la restricción 3):

$$\frac{x^2}{2} + \frac{2x^2}{4} = 1$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

por lo tanto:

$$y = \pm\sqrt{2}$$

Luego tenemos los puntos:

1) $(x, y, z, \lambda) = (1, \sqrt{2}, 0, 4 - \sqrt{2})$ y $f(1, \sqrt{2}, 0) = 4 - \sqrt{2}$
2) $(x, y, z, \lambda) = (-1, -\sqrt{2}, 0, 4 - \sqrt{2})$ y $f(1, -\sqrt{2}, 0) = 4 - \sqrt{2}$
3) $(x, y, z, \lambda) = (1, -\sqrt{2}, 0, 4 + \sqrt{2})$ y $f(1, -\sqrt{2}, 0) = 4 + \sqrt{2}$
4) $(x, y, z, \lambda) = (-1, \sqrt{2}, 0, 4 + \sqrt{2})$ y $f(1, \sqrt{2}, 0) = 4 + \sqrt{2}$

$\boxed{\lambda = 8}$ Se tiene el sistema:

$$\begin{cases} 4x - y - 8x = 0 & (1) \\ 2y - x - \frac{8y}{2} = 0 & (2) \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{8} - 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x - y = 0 & (1) \\ -2y - x = 0 & (2) \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{8} - 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

De 1) y 2) se concluye que $x = 0 = y$ y junto a esto en 3) se obtiene:

$$z = \pm 2\sqrt{2}$$

Luego tenemos los puntos:

1) $(x, y, z, \lambda) = (0, 0, \sqrt{2}, 8)$ y $f(0, 0, \sqrt{2}) = 8$
2) $(x, y, z, \lambda) = (0, 0, -\sqrt{2}, 8)$ y $f(0, 0, -\sqrt{2}) = 8$

Luego, $(x, y, z) = (0, 0, \pm\sqrt{2})$ son máximos globales del problema restringido a Q.

P2. Una empresa quiere conocer la combinación óptima de insumos K, L que producen una cantidad $Q = 16$ de un producto. La cantidad de producción esta determinada por una **función de producción**, $g(L, K) = 2K^{0.25}L^{0.5}$. Dados los precios asociados a los insumos $r_K = 1, w_L = 2$, el problema denominado **minimización de costos** que debe resolver la empresa es:

$$min \quad f(L, K) = w_L L + r_K K$$

$$s.a \qquad g(K, L) = Q$$

i) Resuelva el problema P de la empresa. Explicite el valor del multiplicador de lagrange.

ii) Imagine que la empresa ahora quiere producir una unidad mas del producto, es decir, $Q = 17$. Resuelva ahora el nuevo problema P' de la empresa.
Hint: $8.5^{\frac{4}{3}} \approx 17.347$

iii) Encuentre la relación **aproximada** entre los costos mínimos de los problemas P, P' y el multiplicador de lagrange para el problema P , ¿Cuál es la interpretación para el multiplicador de lagrange en este problema?.

Solución:

i) Para resolver el problema aplicamos el método de los multiplicadores de lagrange:

$$\mathcal{L}(L,K,\lambda) = 2L + K - \lambda(2K^{0.25}L^{0.5} - 16)$$

Las condiciones de primer orden implican que:

1) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 2 - \lambda(2 \cdot 0.5 \cdot K^{0.25}L^{-0.5}) = 0$
2) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 1 - \lambda(2 \cdot 0.25 \cdot K^{-0.75}L^{0.5}) = 0$

si dividimos por dos la ecuación 2), podemos igualar esta a la ecuación 1). sigue que:

$$\lambda \cdot 0.5 \cdot K^{-0.75}L^{0.5} = \lambda \cdot 0.5 \cdot K^{0.25}L^{-0.5}$$

De donde:

$$K = L$$

Aplicando ésta relación en la restricción de igualdad se obtiene que

$$L = K = 16$$

con $\lambda = 4$ multiplicador de lagrange asociado y costo óptimo de 48 u.m. Para comprobar que $(L,K,\lambda) = (16,16,4)$ es mínimo aplicamos el criterio del hessiano orlado: El hessiano orlado para un problema de optimización en $\mathbb{R}^2$ tal que $\mathcal{L}(x,y,\lambda) \in C^2$ esta dado por:

$$H_{\mathcal{O}}(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

En nuestro problema:

$$H_{\mathcal{O}}(16,16,4) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{16} & -\frac{1}{32} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{32} & \frac{3}{64} \end{pmatrix}$$

el análisis que se hace en este caso es diferente pues el primer subdeterminante del hessiano orlado siempre es cero y el segundo subdeterminante siempre es negativo. Por tanto, quien decide la naturaleza de los puntos críticos es el tercer subdeterminante o el determinante total de la matriz. Si este determinante es positivo tenemos un máximo, si es negativo entonces es un mínimo. El determinante del hessiano orlado del problema es:

$$|H_{\mathcal{O}}(16,16,4)| = -\frac{3}{128}$$

por tanto se concluye que el punto es un mínimo

ii) Notamos que la condiciones de optimalidad no cambia (Solo cambia que $Q = 17$), es decir, $K = L$. Sustituyendo en la restricción se obtiene que $K = L = 8.5^{\frac{4}{3}} \approx 17.347$ (se puede probar con el hessiano orlado que es un mínimo) y el costo óptimo es 52.04 u.m.

iii) Vemos que $48 + 4 = 52$ y por tanto, la interpretación para este problema, de acuerdo a la parte i), es que si la empresa decide aumentar la cantidad de producto en una unidad, el costo óptimo (o mínimo costo) crecerá aproximadamente en un factor $\lambda = 4$.

P3. Dos individuos pueden intercambiar sus recursos. Se sabe que el individuo 1 tiene como recurso inicial manzanas y naranjas definidas por el vector $l = (m, n)$ y el individuo 2 tiene como recurso inicial para intercambiar plátanos y uvas definidas por el vector $k = (p, u)$, con $m, n, p, u > 0$. Además, se conocen sus preferencias o **funciones de utilidad** dadas por:

$$u_1(x_1, y_1) = \alpha \ln(x_1) + (1-\alpha)\ln(y_1)$$

$$u_2(x_2, y_2) = \beta \ln(x_2) + (1-\beta)\ln(y_2)$$

Con $0 \le \alpha, \beta \le 1$ parámetros conocidos. Se desea encontrar la cantidad de recursos de intercambio $(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*)$ que maximiza la **utilidad conjunta**, es decir, la suma de las utilidades de los individuos. El problema (P) puede modelarse como:

$$\begin{aligned} \max_{x_1,x_2,y_1,y_2} \quad & t \cdot u_1(x_1, y_1) + (1-t) \cdot u_2(x_2, y_2) \\ s.a \quad & x_1 + x_2 = m + p \\ & y_1 + y_2 = n + u \end{aligned}$$

Donde $0 \le t \le 1$ representa la importancia que se le asigna a las utilidades de los individuos.

i) Resuelva el problema (P), $\forall t \in [0, 1]$

ii) Encuentre e interprete el resultado cuando $t = 1$, $t = 0$ y $t = \frac{1}{2}$.

Solución:

i) La función lagrangeana asociada al problema es:

$$\mathcal{L}(x_1, y_1, x_2, y_2, \lambda, \mu) = u_1(x_1, y_1) + (1-t) \cdot u_2(x_2, y_2) - \lambda(x_1 + x_2 - m - p) - \mu(y_1 + y_2 - n - u)$$

Las condiciones de primer orden nos entregan las ecuaciones:

1) $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} : \dfrac{t\alpha}{x_1} = \lambda$
2) $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} : \dfrac{(1-t)\beta}{x_2} = \lambda$
3) $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_1} : \dfrac{t(1-\alpha)}{y_1} = \mu$
4) $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_2} : \dfrac{(1-t)(1-\beta)}{y_2} = \mu$

De 1) y 2) se obtiene:

i. $t\alpha = \lambda x_1$
ii. $(1-t)\beta = \lambda x_2$

y sumando estas:

$$t\alpha + (1-t)\beta = \lambda(x_1 + x_2) = \lambda(m+p)$$

Análogamente para 3) y 4) se obtiene:

$$t(1-\alpha) + (1-t)(1-\beta) = \mu(y_1 + y_2) = \mu(n+u)$$

de donde:

$$\lambda = \frac{t\alpha + (1-t)\beta}{m+p}$$

$$\mu = \frac{t(1-\alpha) + (1-t)(1-\beta)}{n+u}$$

Con esto

- $x_1^* = \dfrac{t\alpha}{\lambda} = \dfrac{t\alpha}{t\alpha + (1-t)\beta}(m+p)$

- $x_2^* = \dfrac{(1-t)\beta}{\lambda} = \dfrac{(1-t)\beta}{t\alpha + (1-t)\beta}(m+p)$

- $y_1^* = \dfrac{t(1-\alpha)}{\mu} = \dfrac{t(1-\alpha)}{t(1-\alpha) + (1-t)(1-\beta)}(n+u)$

- $y_2^* = \dfrac{(1-t)(1-\beta)}{\mu} = \dfrac{(1-t)(1-\beta)}{t(1-\alpha) + (1-t)(1-\beta)}(n+u)$

$0 \le t \le 1$.

ii) a) Para $t = 1$ se tiene:

- $x_1^* = \frac{\alpha}{\alpha}(m+p) = m+p$
- $x_2^* = 0$
- $y_1^* = \frac{(1-\alpha)}{(1-\alpha)}(n+u) = n+u$
- $y_2^* = 0$

y el problema (P) solo maximiza la utilidad del individuo 1 con $u_1(x_1^*, y_1^*)$, es decir, solo nos importa que gane el individuo 1, el conserva su recursos y adems gana los del individuo 2. El invididuo 2 , enojado, pierdo todo, "simbolizado" por su utilidad $u_2(x_2^*, y_2^*)$ muy negativa.

b) Para $t = 0$ se tiene:

- $x_1^* = 0$
- $x_2^* = m+p$
- $y_1^* = 0$
- $y_2^* = n+u$

y el problema (P) solo maximiza la utilidad del individuo 1 con $u_2(x_2^*, y_2^*)$, es decir, solo nos importa que gane el individuo 2, el conserva su recursos y adems gana los del individuo 1. El invididuo 1 , enojado, pierdo todo, "simbolizado" por su utilidad $u_1(x_1^*, y_1^*)$ muy negativa.

c) Para $t = \frac{1}{2}$ se tiene:

- $x_1^* = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(m+p)$
- $x_2^* = \frac{\beta}{\alpha+\beta}(m+p)$
- $y_1^* = \frac{(1-\alpha)}{(1-\alpha)+(1-\beta)}(n+u)$

- $y_2^* = \dfrac{(1-\beta)}{(1-\alpha)+(1-\beta)}(n+u)$

y el problema (P) maximiza la utilidad conjunta del individuo 1 y 2 cuando se les otorga la misma importancia, cuando cada uno sabe cuanto tiene el otro para intercambiar. la utilidad conjunta esta dada por $\frac{1}{2}u_1(x_1^*, y_1^*) + \frac{1}{2}u_2(x_2^*, y_2^*)$

P4. Se desea determinar los valores de los parámetros a, b para los que la función:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2axy + 2bz$$

Presenta en $P = (1, 1, 1)$ un máximo local sobre la esfera de ecuación:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3$$

Para esto proceda como sigue:

i) Plantee el problema a resolver. Vea si P satisface la restricción asociada al problema.

ii) Usando la técnica de los multiplicadores de Lagrange, encuentre $\lambda(b)$ que garantize que P es punto crítico, donde λ es el multiplicador de lagrange asociado al problema.

iii) Defina:

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2axy + 2bz - \lambda(b)[x^2 + y^2 + z^2 - 3]$$

Encuentre el Hessiano de g en el punto P, $\mathcal{H}_g(P)$.

iv) La forma cuadrática de un Hessiano $\mathcal{H}$ de dimensiones 3×3 se define por:

$$Q_{\mathcal{H}}(u_1, u_2, u_3) = (u_1, u_2, u_3)\mathcal{H}(u_1, u_2, u_3)^t$$

Encuentre la forma cuadrática asociada a $\mathcal{H}_g(P)$

v) Una condición suficiente para que P sea máximo local es que $Q_{\mathcal{H}_g(P)}(u_1, u_2, u_3)$ sea definida negativa sobre el plano tangente a la esfera en el punto P dado por la ecuación:

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0$$

Convierta $Q_{\mathcal{H}_g(P)}(u_1, u_2, u_3) = q_{\mathcal{H}_g(P)}(u_1, u_2)$

vi) $q_{\mathcal{H}_g(P)}(u_1, u_2)$ se dice definida negativa si $q_{\mathcal{H}_g(P)}(u_1, u_2) < 0, \forall (u_1, u_2) \neq (0, 0)$. ¿Cuál es la condición para que P sea máximo local?

Solución:

i) Como se describe el enunciado, el problema a resolver es:

$$\begin{array}{l} \max\ x^2 + y^2 + 2axy + 2bz \\ s.a.\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{array}$$

y queremos que P sea máximo, por lo tanto debe satisfacer la restricción de igualdad. Esto se verifica en P, pues:

$$1 + 1 + 1 = 3$$

ii) Usando la técnica de los multiplicadores de Lagrange, se obtiene:

1) $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x + 2ay - 2\lambda x = 0$

2) $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y + 2ax - 2\lambda y = 0$

3) $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 2b - 2\lambda z = 0$

4) $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$

Como queremos que P sea punto crítico (Condición de primer orden), se tiene que cumplir que:

$$\nabla \mathcal{L}(1, 1, 1, \lambda) = \vec{0}$$

Por tanto, las anteriores ecuaciones se transforman en:

1) $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2 + 2a - 2\lambda = 0$

2) $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2 + 2a - 2\lambda = 0$

3) $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 2b - 2\lambda = 0$

1) y 2) nos dicen que:

$$\lambda(a) = a + 1$$

3) nos dice que:

$$\lambda(b) = b$$

de donde se deduce que:

$$b = a + 1$$

iii) Con $\lambda(b)$, el hessiano de g esta dado por:

$$\begin{pmatrix} 2(1-b) & 2(b-1) & 0 \\ 2(b-1) & 2(1-b) & 0 \\ 0 & 0 & -2b \end{pmatrix}$$

iv) La forma cuadrática queda dada por:

$$Q_{\mathcal{H}}(u_1, u_2, u_3) = 2(b-1)(u_1^2 + u_2^2 - 2u_1u_2) - 2bu_3^2$$

v) Con la ecuación dada se tiene:

$$Q_{\mathcal{H}}(u_1, u_2, -u_1 - u_2) = q_{\mathcal{H}}(u_1, u_2) = (2-4b)(u_1^2 + u_2^2) + 4u_1u_2$$

vi) Para que:

$$q_{\mathcal{H}}(u_1, u_2) = (2-4b)(u_1^2 + u_2^2) + 4u_1u_2 < 0$$

Se tiene que cumplir que:

$$4u_1u_2 < 2(2b-1)(u_1^2 + u_2^2), \forall (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \tag{10}$$

Conocemos una desigualdad típica:

$$2u_1u_2 \leq (u_1^2 + u_2^2), \forall (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$$

también:

$$4u_1u_2 \leq 2(u_1^2 + u_2^2), \forall (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \tag{11}$$

Si hacemos el contraste entre (15) y (16), la única posibilidad para que P sea máximo relativo es que:

$$1 < 2b - 1 \Rightarrow 2 < 2b \Rightarrow 1 < b$$

y con la dependencia de $a(b) = b - 1$ se concluye que

$$b > 1, \quad a > 0$$

P5. Calcular el punto más alto que tiene la curva generada por la intersección de las siguientes superficies:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6$$
$$2x + y - z = 2$$

$\boxed{\textbf{Solución:}}$

El problema a resolver será

$$\begin{array}{ll} \max & z \\ \text{s.a.} & x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ & 2x + y - z = 2 \end{array}$$

El lagrangiano asociado a este problema será:

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = z - \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 6) - \lambda_2(2x + y - z - 2)$$

Derivando e igualando a 0.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -2\lambda_1 x - 2\lambda_2 = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -2\lambda_1 y - \lambda_2 = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 1 - 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = x^2 + y^2 + z^2 - 6 = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = 2x + y - z - 2 = 0$$

Manipulando las ecuaciones se obtiene la ecuación cuadrática para y

$$15y^2 - 10y - 1 = 0$$

Donde se concluye que $y = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}$, $x = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}$, $z = -\frac{1}{3} + \frac{10}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}$, se usa el signo positivo de y pues se quiere maximizar la coordenada z.

P6. Encuentre el volumen del mayor paralelepípedo rectangular de coordenadas positivas tal que sus lados son paralelos a los ejes coordenados y está inscrito en un elipsoide de ecuación

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1 \qquad a_i > 0 \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$$

i) Plantee la optimización a resolver

ii) Resuelva el problema antes encontrado.

Solución:

Como el objetivo es maximizar el volumen de un paralelepípedo de coordenadas positivas, es claro que la función objetivo será:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i$$

Luego el problema a resolver es

$$\begin{aligned} \max \quad & \prod_{i=1}^{n} x_i \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1 \end{aligned}$$

Escribiendo el lagrangiano asociado:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} x_i - \lambda(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} - 1)$$

Para optimizar lo siguiente debemos igualar el gradiente del lagrangiano a 0.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{x_i} - \frac{2\lambda x_i}{a_i^2} = 0$$

$$\implies \prod_{i=1}^{n} x_i = 2\lambda \frac{x_i^2}{a_i^2} \Big/ \sum_{i=1}^{n}$$

$$\implies n \prod_{i=1}^{n} x_i = 2\lambda$$

$$\implies n 2\lambda \frac{x_i^2}{a_i^2} = 2\lambda$$

$$\implies x_i^* = \frac{a_i}{n^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Longrightarrow \prod_{i=1}^{n} x_i^* = \frac{\prod_{i=1}^{n} a_i}{n^{\frac{n}{2}}}$$

Con lo que hemos resuelto el problema.

P7. Sea $f(x, y) = x^2 + y^2$. Considere el problema (P) definido por:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & f(x, y) \\ \\ s.a. & (x-1)^3 - y^2 = 0 \end{array}$$

i) Justifique, sin usar **cálculo diferencial** que $(1, 0)$ es el punto mínimo del problema (P).

ii) Transforme (si es posible) el problema (P) en uno sin restricciones y determine el punto mínimo del problema resultante. Discuta su resultado con la parte a).

iii) Determine si el problema (P) puede ser resuelto mediante el Teorema de Lagrange. Discuta.

Solución:

i) Como la justificación debe ser sin cálculo diferencial. La única alternativa es usar la definición de punto mínimo. Se debe comprobar que $(1, 0)$ satisface la restricción de igualdad y que $f(1, 0) \leq f(x, y)$ para todo (x, y) tal que $(x-1)^3 - y^2 = 0$. Claramente $(1, 0)$ satisface la restricción. Para comprobar la desigualdad $f(1, 0) \leq f(x, y)$ cuando $(x-1)^3 - y^2 = 0$, hay que notar que:

$$(x-1)^3 - y^2 = 0 \Longrightarrow (x-1)^3 \geq 0$$

Ya que $y^2 \geq 0$, y por lo tanto:

$$(x-1)^3 - y^2 = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{array} \right.$$

Lo que a su vez implica que:

$$x^2 + y^2 \geq 1 = f(1, 0)$$

lo que comprueba que $(1, 0)$ es punto mínimo de (P).

ii) Transformando el problema a uno sin restricciones dado que $(x-1)^3 = y^2$, Obtenemos la función de una variable:

$$g(x) = x^2 + (x-1)^3$$

Si se aplican las condiciones de 1er y 2do. orden para determinar el punto mínimo de g, se comprueba fácilmente que tal aplicación no es posible ya que $g'(x) = 0$ implica que:

$$2x + 3(x-1)^2 = 0$$

Y este ecuación no tiene solución en $\mathbb{R}$. Por lo tanto el reemplazo $(x-1)^3 = y^2$ en el problema (P) no permite resolver el problema original, puesto que el reemplazo no toma en cuenta las restricciones $x \geq 1$ y $y \geq 0$. Se concluye que ambos problemas no son equivalentes.

iii) Cómo $f(x,y) = x^2+y^2$ y $g(x,y) = (x-1)^3-y^2$ son funciónes continuamente diferenciables en $\mathbb{R}^2$, entonces el punto mínimo de f restringida a $g(x,y) = 0$, puede obtenerse mediante la solución del sistema de ecuaciones entregados por la condición de primer orden aplicado a la función lagrangeana:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - \lambda \cdot [(x-1)^3 - y^2]$$

que es:

- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) = 2x - 3\lambda(x-1)^2 = 0$
- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) = 2y - 2\lambda y = 0$

Y este sistema no admite solución en $\mathbb{R}^3$. En efecto, de la segunda ecuación resulta $\lambda = 1$ ó $y = 0$. Si $\lambda = 1$, la primera ecuación es $2x - 3(x-1)^2 = 0$ la cual no tiene solución en $\mathbb{R}$. Si $y = 0$, las ecuaciones $2x - 3\lambda(x-1)^2 = 0$ y $(x-1)^3 - y^2 = 0$ no tiene solución para x y λ. Ya que:

$$(x-1)^3 = 0 \Longrightarrow x = 1$$

y $(x,y) = (1,0)$ no satisface la otra ecuación:

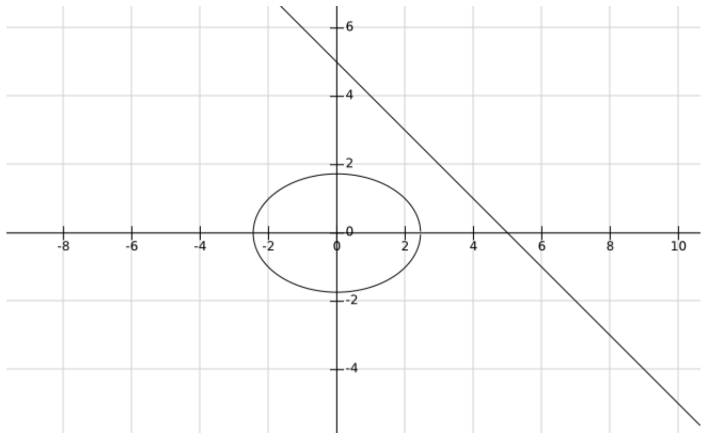
$$2 - 3\lambda(x-1)^2 \neq 0$$

Por tanto el problema (P) no puede ser resuelto por la técnica de los multiplicadores de lagrange. La razón es que no se cumple una de las condiciones del teorema de los multiplicadores de Lagrange que se refiere a la independencia lineal de los vectores gradientes de las funciones asociadas a las restricciones en el punto mínimo. En el problema sabiendo que $(1,0)$ era mínimo se debió chequear el vector gradiente $\nabla g(1,0)$ era no nulo (condición para que sea linealmente independiente). Lo que efectivamente no se cumple, pues $\nabla g(1,0) = (0,0)$.

P8. Hallar la mínima distancia entre la elipse $x^2 + 2y^2 = 6$ y la recta $x + y = 5$.

Solución:

Gráficamente ya se puede analizar el signo de los puntos que encontraremos



Dicho esto tenemos que minimizar una distancia. La función distancia entre puntos con dos coordenadas es:

$$f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

y ademas necesitamos que los puntos esten en la elipse y la recta respectivamente. Es posible utilizar como función objetivo

$$\overline{f}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

y luego aplicar la función raíz al resultado (¿Por qué?). Dicho esto, sea (x_1, y_1) y (x_2, y_2) los puntos que descansan en la elipse y en la recta respectivamente. El problema a resolver es:

$$\text{Mín } (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$\begin{aligned} s.a.\ & x_1^2 + 2y_1^2 - 6 = 0 \\ & x_2 + y_2 - 5 = 0 \end{aligned}$$

El lagrangeano asociado al problema es

$$\mathcal{L}(x_1, y_1, x_2, y_2, \lambda, \mu) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - \lambda(x_1^2 + 2y_1^2 - 6) - \mu(x_2 + y_2 - 5)$$

Aplicamos las condiciones de primer orden:

1) $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} : 2(x_1 - x_2) = 2\lambda x$

2) $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_1} : 2(y_1 - y_2) = 4\lambda y$

3) $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} : -2(x_1 - x_2) = \mu$

4) $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_2} : -2(y_1 - y_2) = \mu$

5) $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} : x_1^2 + 2y_1^2 - 6 = 0$

6) $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} : x_2 + y_2 - 5 = 0$

Las ecuaciones 1) y 3) implican que:

$$-\mu = 2\lambda x_1$$

Las ecuaciones 2) y 4) implican que:

$$-\mu = 4\lambda y_1 = 2\lambda \cdot (2y_1)$$

De donde se deduce que:

$$x_1 = 2y_1$$

y esto debe satisfacerse en al restricción de la elipse, por lo que:

$$(2y_1)^2 + 2y_1^2 = 6$$

$$6y_1^2 = 6$$

$$y_1 = \pm 1$$

por lo tanto:

$$x_1 = \pm 2$$

De la gráfica del problema vemos que el punto que buscamos necesariamente tiene que ser $(x_1, y_1) = (2, 1)$. Con esto, notamos que en las ecuaciones 3) y 4) se cumple:

$$-2(x_1 - x_2) = -2(y_1 - y_2)$$

$$2(x_1 - x_2) = 2(y_1 - y_2)$$

$$(x_1 - x_2) = (y_1 - y_2)$$

$$(2 - x_2) = (1 - y_2)$$

$$1 + y_2 = x_2$$

y esto debe cumplir en la restricción de la recta:

$$1 + y_2 + y_2 = 5$$

$$2y_2 = 4$$

$$y_2 = 2$$

por lo tanto:

$$x_2 = 3$$

Así el punto óptimo del problema es:

$$(x_1, y_1, x_2, y_2) = (2, 1, 3, 2)$$

Este es un mínimo y es global. Se puede argumentar desde el dibujo del problema. Por lo tanto la distancia mínima entre la elipse y la recta es:

$$\overline{f}((2,1),(3,2)) = (2-3)^2 + (1-2)^2 = 2$$

$$f((2,1),(3,2)) = \sqrt{2}$$

P9. **[Propuesto]** Considere el problema

$$\min \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{x_i}$$

$$s.a. \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$$
$$x_i \geq 0$$

Donde a_i,c_i, $b > 0$ son constantes. Muestre que el valor óptimo de la función objetivo está dado por

$$f(x^*) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i c_i}\right)^2}{b}$$

P10. **[Propuesto]** Una caja rectangular sin tapa tiene un área de 32 cm^2. Encontrar las dimensiones de la caja de modo que su volumen sea máximo.

P11. **[Propuesto]** Hallar la mayor y menor distancia entre el elipsoide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 2$. (Nota: Ambas superficies no se intersecan).

P12. **[Propuesto]** Hallar la mayor y menor distancia entre el punto $(0,0,2)$ y la esfera definida por:

$$x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$$

P13. **[Propuesto]** Hallar la mayor y menor distancia entre el origen de coordenadas y el cono definido por

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = z^2.$$