Pauta Auxiliar 15

P1 (a) P.D.Q. AA^t y A^tA son semidefinidas positivas.

En efecto: Primero notar que $(AA^t)^t = AA^t$ y $(A^tA)^t = A^tA$, es decir, son matrices simétricas ∴ tiene sentido hablar de semidefinida positiva. Ahora veamos:

AA^t Sea $x \in \mathbb{R}^n$ cualquiera:

$$x^t A A^t x = (A^t x)^t A^t x$$

Pues $\langle u, v\rangle = u^t v$

$$= \langle A^t x, A^t x\rangle$$

$$= \|A^t x\|^2 \geq 0$$ pues es un numero al cuadrado.

Definición de norma.

∴ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $x^t(AA^t)x \geq 0$, así AA^t es semi-def positiva

A^tA Mismo argumento:

$$x^t A^t A x = (Ax)^t Ax$$

$$= \langle Ax, Ax\rangle$$

$$= \|Ax\|^2 \geq 0$$

∴ A^tA es semi-def positivo

(b) · A simetrica

· 2 y −2 son los unicos valores propios de A

P.D.Q. $A + 3I$ es def. positiva

En efecto: La idea es que $A+3I$ tiene los valores propios de A pero sumandoles 3. Veamos esto:

Sea λ valor propio de A $\Leftrightarrow$ $Av = \lambda v$

$\Leftrightarrow$ $Av + 3Iv = \lambda v + 3Iv$

$\Leftrightarrow$ $(A+3I)v = (\lambda+3)v$

$\Leftrightarrow$ $(\lambda+3)$ es valor propio de $A+3I$.

$\therefore$ Como sabemos que 2 y -2 son los únicos valores propios de A, tenemos que 5 y 1 son los únicos valores de $A+3I$.

$\therefore$ $A+3I$ es def. positiva pues sus valores propios son >0.

(c) · B simétrica

· B def positiva

· $\lambda_1 > 0$ menor valor propio de B.

P.D.Q. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x^t B x \geq \lambda_1 x^t x$

En efecto: Veamos que $x^t(B-\lambda_1 I)x \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, esto es ver que $B-\lambda_1 I$ es semidefinida positiva. En efecto:

Sea λ valor propio de B, recordar que $\lambda \geq \lambda_1$. Veamos que $\lambda - \lambda_1$ es valor propio de $B - \lambda_1 I$:

λ valor propio de B $\Leftrightarrow$ $Bv = \lambda v$

$\Leftrightarrow$ $Bv - \lambda_1 Iv = \lambda v - \lambda_1 Iv$

$\Leftrightarrow$ $(B-\lambda_1 I)v = (\lambda - \lambda_1)v$

$\Leftrightarrow$ $(\lambda - \lambda_1)$ es valor propio de $B - \lambda_1 I$

$\therefore$ los valores propios de $B - \lambda_1 I$ son de la forma $\lambda - \lambda_1 \geq 0$

$\therefore$ $B - \lambda_1 I$ sera semi def positiva pues sus valores propios son ≥ 0.

Pauta Auxiliar 15

P2

(a) $ax^2 + ay^2 + xy + \sqrt{2}\left(a - \frac{1}{2}\right)x - \sqrt{2}\left(a - \frac{1}{2}\right)y = 1$

- Primero se rota la cónica, para eliminar el termino xy.

Notar que la matriz asociada a los terminos:

$ax^2 + ay^2 + xy$ es: $A = \begin{bmatrix} a & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & a \end{bmatrix}$

(Esto pues $ax^2 + ay^2 + xy = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$)

Para hacer la rotación hay que diagonalizar A.

[Diagonalización]

i) Hallamos polinomio característico:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2 - \frac{1}{4} = \left(a - \lambda - \frac{1}{2}\right)\left(a - \lambda + \frac{1}{2}\right)$$

Luego los valores propios son $\lambda = a - \frac{1}{2}$ y $\lambda = a + \frac{1}{2}$

Hallemos los vectores propios:

$\lambda = a - \frac{1}{2}$ $\quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, Solucionamos $(A - \lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$\xrightarrow{f_2' = f_2 - f_1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Así el sistema se reduce a la ecuación $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0$

$\Leftrightarrow y = -x$ luego $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Así $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ es vector propio

$\boxed{\lambda = a + \frac{1}{2}}$ $A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$\therefore$ hay que solucionar el sistema $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$\xrightarrow{f_2' = f_1 + f_2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\therefore$ el sistema se reduce a $-x + y = 0$

$\Leftrightarrow$ $x = y$ así:

$= \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\therefore$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es vector propio

$\therefore$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base de vectores propios.

Notar que ya es ortogonal $\therefore$ basta normalizar para obtener una base ortonormal:

$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base ortonormal.

Así, tenemos que $A = P \, D \, P^T$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{2}^{-1} & \sqrt{2}^{-1} \\ -\sqrt{2}^{-1} & \sqrt{2}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a - \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & a + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}^{-1} & -\sqrt{2}^{-1} \\ \sqrt{2}^{-1} & \sqrt{2}^{-1} \end{bmatrix}$$

$\therefore$ tenemos que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t P \; A \; P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

haciendo el cambio de variable $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

se elimina el término xy.

[Reordenando con las nuevas variables]

Así tendríamos que:

$$a x^2 + a y^2 + xy + \sqrt{2}\left(a - \frac{1}{2}\right) x - \sqrt{2}\left(a - \frac{1}{2}\right) y = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t P D P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2}\left(a - \frac{1}{2}\right) \\ -\sqrt{2}\left(a - \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}^t P P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^t D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(a - \frac{1}{2}\right) \\ -\left(a - \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}^t \sqrt{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2}^{-1} & \sqrt{2}^{-1} \\ -\sqrt{2}^{-1} & \sqrt{2}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(a - \frac{1}{2}\right) u^2 + \left(a + \frac{1}{2}\right) v^2 + \begin{pmatrix} (2a-1) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(a - \frac{1}{2}\right) u^2 + \left(a + \frac{1}{2}\right) v^2 + (2a-1) u = 1 \qquad (*)$$

Completando cuadrados: (En este caso se puede en (*) sin dividir por 0)

$$\underbrace{\left(a - \frac{1}{2}\right)}_{(1)} (u+1)^2 + \underbrace{\left(a + \frac{1}{2}\right)}_{(2)} v^2 = \underbrace{a + \frac{1}{2}}_{(3)}$$

[Clasificando]

Para clasificar los casos, hay que fijarse en los términos (1), (2) y (3) ¿cuándo son positivos, negativos o 0?

- Si $a > \frac{1}{2}$ los 3 son positivos, y tendríamos una expresión del estilo:

$$\frac{(u+1)^2}{\left(\frac{a + \frac{1}{2}}{a - \frac{1}{2}}\right)} + \frac{v^2}{\left(\frac{a + \frac{1}{2}}{a + \frac{1}{2}}\right)} = 1$$

$\therefore$ la cónica sería elipse

• Si $a = \frac{1}{2}$ la expresión queda:

$v^2 = 1$ que corresponde a la ecuación de dos rectas paralelas que pasan por $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

• Si $a \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ tenemos que:

$$\underbrace{\left(a - \frac{1}{2}\right)}_{<0} (u+1)^2 + \underbrace{\left(a + \frac{1}{2}\right)}_{>0} v^2 = \underbrace{a + \frac{1}{2}}_{>0}$$

$\therefore$ la cónica corresponde a una hipérbola.

• Si $a = -\frac{1}{2}$ la ecuación queda:

$(u+1)^2 = 0$ lo cual es una recta $u = -1$.

• Si $a < -\frac{1}{2}$ tenemos que:

$$\underbrace{\left(a - \frac{1}{2}\right)}_{<0} (u+1)^2 + \underbrace{\left(a + \frac{1}{2}\right)}_{<0} v^2 = \underbrace{a + \frac{1}{2}}_{<0}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} - a\right)(u+1)^2 + \left(-a - \frac{1}{2}\right) v^2 = \left(-a - \frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(u+1)^2}{\underbrace{\left(\frac{-a - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - a}\right)}_{>0}} + \frac{v^2}{1} = 1$$

lo cual corresponde a una elipse.

En resumen, la cónica es:

- Una elipse si $|a| > \frac{1}{2}$
- Una hipérbola si $|a| < \frac{1}{2}$
- Una recta si $a = -\frac{1}{2}$
- Dos rectas paralelas si $a = \frac{1}{2}$
- Un punto para ningún a
- Una circunferencia para ningún a
- Una parábola para ningún a
- Un conjunto vacío para ningún a.

Apendice: En la expresión $(*)$:

$$\left(a - \frac{1}{2}\right)(u)^2 + \left(a + \frac{1}{2}\right)v^2 + (2a-1)\,u = 1$$

Se pudo factorizar directamente pues el término $a - \frac{1}{2}$ aparece multiplicando a u^2 y a u. Esto no ocurre normalmente, y para factorizar algo del estilo $p u^2 + q u$, hay que dividir por p, en ese caso hay que ponerse primero en el caso $p = 0$, y luego $p \neq 0$.

(b) Con $a = \frac{3}{2} > \frac{1}{2}$, por parte (a) tendremos una elipse:

$$(u+1)^2 + 2v^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(u+1)^2}{2} + \frac{v^2}{1} = 1 \quad \text{cuyos semiejes son } 2 \text{ y } 1$$

Para graficar hay que saber como se posiciona el eje u-v c/R al eje x-y. Esto se logra con el

Análisis de $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}^{-1} & -\sqrt{2}^{-1} \\ \sqrt{2}^{-1} & \sqrt{2}^{-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{2}^{-1}(x-y) \\ \sqrt{2}^{-1}(x+y) \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} u = \sqrt{2}^{-1}(x-y) \\ v = \sqrt{2}^{-1}(x+y) \end{cases}$$

Buscamos direcciones donde $(u=0 \text{ y } v\neq 0)$ y $(u\neq 0 \text{ y } v=0)$:

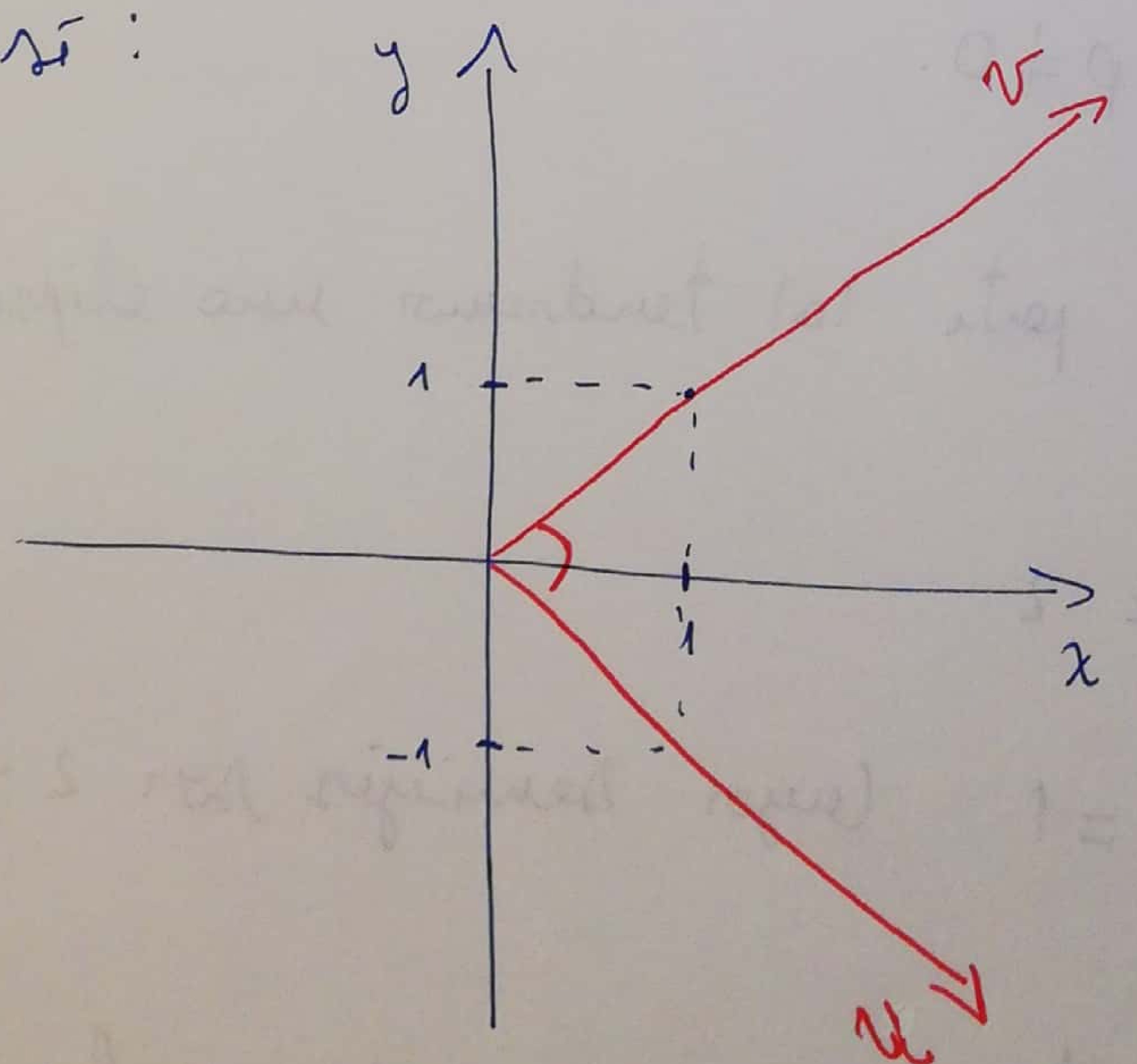
- en $x=y=1$: $\quad u=0$

$$v = 2\sqrt{2}^{-1} = \sqrt{2} > 0$$

- en $x=1$ y $y=-1$ $\quad v=0$

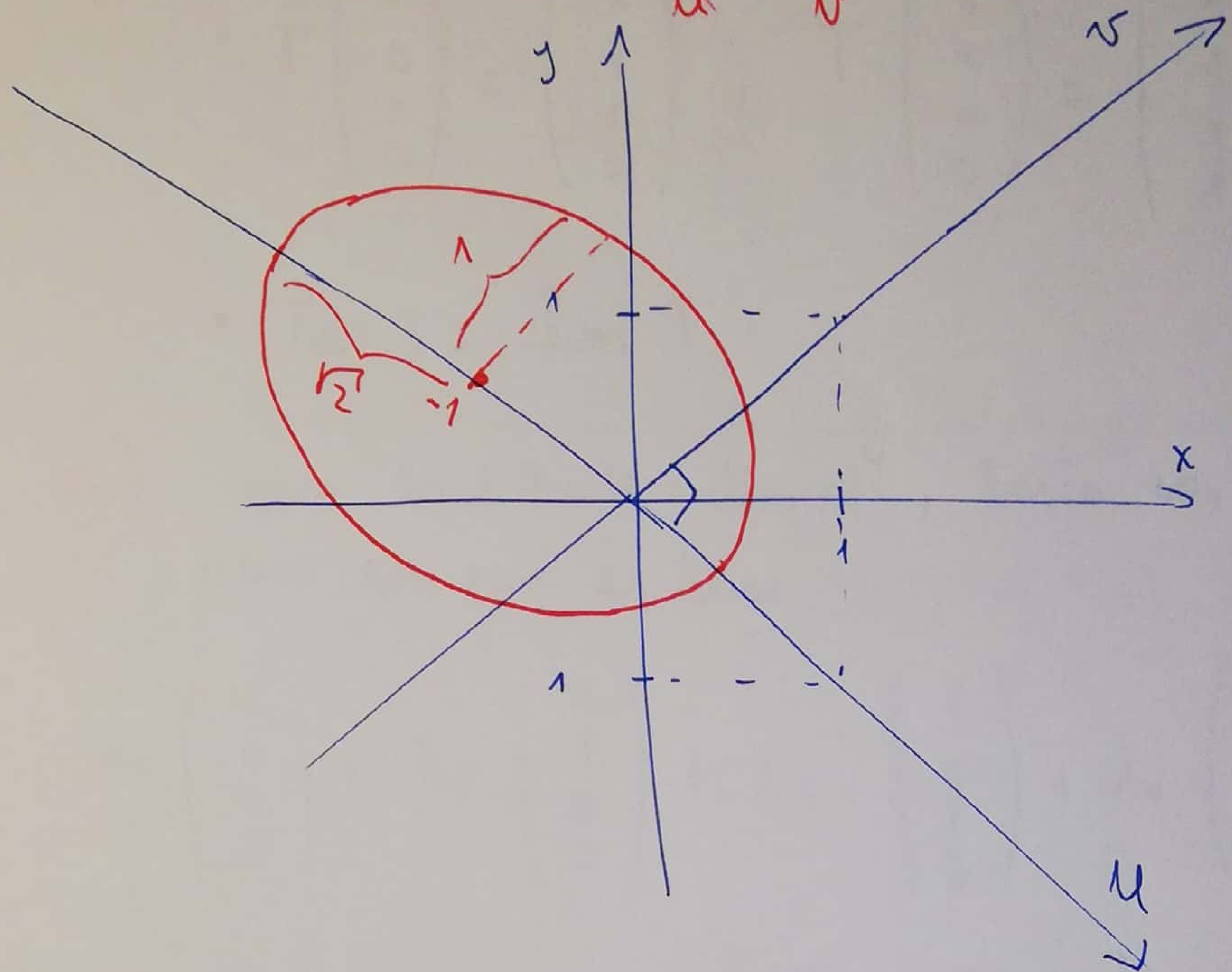
$$u = 2\sqrt{2}^{-1} = \sqrt{2} > 0$$

Así:



Luego como la elipse tiene semiejes $\sqrt{2}$ en u, 1 en v y está centrada en $(-1, 0)$:

u v



Pauta Auxiliar 15

P3

- $B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$

- $T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

- $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Im} T$

a) Como $\operatorname{card} B = 4 = \dim \mathbb{R}^4$, basta ver que es l. i. para ver que es base:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ \lambda_3 + \lambda_4 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow \lambda_4 = 0$ por fila 4

$\Rightarrow \lambda_3 = 0$ por fila 3 $\Rightarrow \lambda_2 = 0$ por fila 2

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$ por fila 1

$\therefore$ B es l. i., así B es base.

b) Por T. N. I. $\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T = 4 \quad (= \dim \mathbb{R}^4)$

y como $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Im} T$:

$$2 \dim \operatorname{Ker} T = 4 \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} T = 2$$

$\therefore$ Basta encontrar dos vectores l. i. en el Ker T para que

Sean base.

Como $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \in \text{Im } T = \text{Ker } T$

tenemos que $\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$ es base.

c.) Calculamos las imagenes de los elementos de B por T:

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} T\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \\ T\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{ estan en el Ker}$$

Así:

$$M_{B,B}(T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d) En esta parte se podría usar cambio de base, pero conviene más calcularlo directamente:

- $T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $T(e_2) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $T(e_3) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- $T(e_4) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore$ la matriz buscada es:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pauta Auxiliar 15

P4)

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} 3x - 2y - z - 4w = 0 \\ x + y - 2z - 3w = 0 \end{array} \right\}$$

(a) P.D.Q. U es s.e.v. de $\mathbb{R}^4$

En efecto:

(i) $U \neq \phi$ pues $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$ ✓

(ii) $U \subseteq \mathbb{R}^4$ por def. de U

(iii) Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $u, v \in U$

P.D.Q. $\lambda u + \mu v \in U$

en efecto: si $u = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ u_w \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ v_w \end{bmatrix}$

Veamos que se cumple las ecuaciones de U:

- $3(\lambda u_x + \mu v_x) - 2(\lambda u_y + \mu v_y) - (\lambda u_z + \mu v_z) - 4(\lambda u_w + \mu v_w)$

$$= \lambda \underbrace{\left[3u_x - 2u_y - u_z - 4u_w\right]}_{=0 \text{ pues } u \in U} + \mu \underbrace{\left[3v_x - 2v_y - v_z - 4v_z\right]}_{=0 \text{ pues } v \in U}$$

$= 0$

- $[\lambda u_x + \mu v_x] + [\lambda u_y + \mu v_y] - 2[\lambda u_z + \mu v_z] - 3[\lambda u_w + \mu v_w]$

$$= \lambda \underbrace{\left[u_x + u_y - 2u_z - 3u_w\right]}_{=0 \text{ pues } u \in U} + \mu \underbrace{\left[v_x + v_y - 2v_z - 3v_w\right]}_{=0 \text{ pues } v \in U}$$

$= 0$

Luego $(\lambda u + \mu v) \in U$

$\therefore$ U es s.e.v. de $\mathbb{R}^4$

(b) Para encontrar una base de U, tenemos que despejar dos variables con las ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x - 2y - z - 4w = 0 & (1) \\ x + y - 2z - 3w = 0 & (2) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ haciendo $(1) + 2\cdot(2)$ $\begin{cases} 5x - 5z - 10w = 0 \\ x + y - 2z - 3w = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - z - 2w = 0 \\ x + y - 2z - 3w = 0 \end{cases}$$

De la primera fila $x = z + 2w$

de la segunda: $y = 2z + 3w - x$

$= 2z + 3w - z - 2w$

$= z + w$

$\therefore$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z + 2w \\ z + w \\ z \\ w \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ genera U, y como es evidente l.i., es base

(c) Debemos encontrar W tal que $U \oplus W = \mathbb{R}^4$.

Recordar que:

$U \oplus W = \mathbb{R}^4 \iff U + W = \mathbb{R}^4 \wedge U \cap W = \{0\}$

$\therefore$ Como $\dim U = 2$ por parte (b), debemos buscar W de dimensión 2 cuya intersección con U sea sólo el 0. Pensamos, por ejemplo, en elementos de la base canónica:

que $\{e_1, e_2\}$ sea base de W, notar que $e_1 \notin U$ y $e_2 \notin U$.

Además $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es l. i.

$\therefore$ si $W = \langle \{e_1, e_2\} \rangle$ tenemos $U \cap W = \{0\}$

y $U + W = \mathbb{R}^4$ pues $\dim U + \dim W = 2 + 2 = 4 = \dim \mathbb{R}^4$

y $U + W$ es s.e.v. de $\mathbb{R}^4$.

$\therefore U \oplus W = \mathbb{R}^4$