

MA1102-3: Álgebra Lineal

Profesor: Jaime San Martín

Auxiliar: Felipe Hernández Castro



Auxiliar 15 - Preparación Examen

26 de diciembre de 2018

P1. [Algunos problemas de distintos exámenes]

- (a) Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Demuestre que AA^t y A^tA son semidefinidas positivas.
- (b) Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, simétrica, cuyos únicos valores propios son 2 y -2 . Demuestre que $A + 3I$ es definida positiva.
- (c) Sea $B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, simétrica, definida positiva y sea $\lambda_1 > 0$, su menor valor propio demuestre que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, x^t B x \geq \lambda_1 x^t x$$

P2. [P1 C3 2007-2]

- (a) Dada la ecuación:

$$ax^2 + ay^2 + xy + \sqrt{2}\left(a - \frac{1}{2}\right)x - \sqrt{2}\left(a - \frac{1}{2}\right)y = 1$$

Determine todos los valores de a tales que la ecuación corresponda a:

- Elipse.
- Circunferencia.
- Hipérbola.
- Parábola.
- Recta o rectas.
- Un punto.
- Conjunto vacío.

- (b) Para $a = \frac{3}{2}$, bosqueje el gráfico del lugar geométrico que define la ecuación de la parte (a)

P3. [P3 C3 2011-2] Considere el conjunto $B \subset \mathbb{R}^4$ dado por $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$

la transformación lineal que satisface las condiciones siguientes:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \ker(T) = \text{Im}(T).$$

- a) Pruebe que B es base de $\mathbb{R}^4$.

- b) Demuestre que una base de $\ker(T)$ es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

- c) Calcule la matriz representante de T cuando se ocupa B como base en la partida y en la llegada.
- d) Calcule la matriz representante de T cuando se ocupa la base canónica en la partida y en la llegada.

P4. [P1 C2 2013-1] Sea

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid 3x - 2y - z - 4w = 0, \quad x + y - 2z - 3w = 0 \right\}.$$

- (a) Demuestre que U es s.e.v. de $\mathbb{R}^4$
- (b) Encuentre una base para U .
- (c) Encuentre un s.e.v. W de $\mathbb{R}^4$ tal que $U \oplus W = \mathbb{R}^4$.