MA1102-3: Álgebra Lineal
Profesor: Jaime San Martín
Auxiliar: Felipe Hernández Castro

Resumen - Formas cuadráticas

23 de diciembre 2018

8.-Formas Cuadráticas

- **[Forma cuadrática]**:
  Dado una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}$ simétrica, definimos $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por $q(x) = x^t Ax$, en donde llamamos q por forma cuadrática.

- **[(Semi) Definida positiva/negativa]**:
  Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}$ simetrica, diremos que

  (I) A es definida positiva si $\forall x \neq 0 \quad x^t Ax > 0$
  (II) A es semidefinida positiva si $\forall x \quad x^t Ax \geq 0$
  (III) A es definida negativa si $\forall x \neq 0 \quad x^t Ax < 0$
  (IV) A es semidefinida negativa si $\forall x \quad x^t Ax \leq 0$

  Observación: A es definida (semidefinida) positiva ssi $-A$ es definida (semidefinida) negativa.

- **[Equivalencias definida positiva]**:
  Sea una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}$ simétrica. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

  (I) A es definida positiva.
  (II) Los valores propios de A son positivos.
  (III) El método de Gauss permite escalonar A con pivotes siempre positivos utilizando solo matrices elementales de suma.

- **[Descomposición de Cholesky]**:
  Dado una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}$, esta admite una descomposición de Cholesky si existe matriz R triangular inferior, cuyos terminos de la diagonal son estrictamente mayores a 0, tal que:

  $$A = RR^t$$

  Observación: A es definida positiva si y solo si admite una descomposición de Cholesky.

- **[Forma canonica]**:
  Dado una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}$ simetrica, su forma cuadratica sera

  $$x^t Ax = x^t PDP^t x = (P^t x)^t DP^t x$$

  Si hacemos el cambio de variable $y = P^t x$ llegaremos a la forma canonica:

  $$x^t Ax = y^t Dy = \sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2$$

- **[Homotecia]**:
  Dado una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}$ simétrica y su forma cuadrática $x^t Ax$, tenemos que existe matriz L invertible tal que si $z = Lx$ entonces en terminos de las variables z la forma cuadratica se expresa como $\bar{q}(z) = z_1^2 + ... + z_p^2 - (z_{p+1}^2 + ... + z_r^2)$, donde $r = rango(A) = numero\ de\ valores\ propios \neq 0$ y $p = numero\ de\ valores\ propios > 0$

- **[Cónicas]**:
  Llamaremos cónica en $\mathbb{R}^2$ al conjunto solución de la ecuación:

  $$ax^2 + by^2 + 2cxy + dy + fx = e$$

  La cual se puede escribe matricialmente como:

  $$v^t Av + g^t v = e$$

  Con $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} d \\ f \end{pmatrix}$. Si además $A = PDP^t$, tendremos que:

  $$v^t PDP^t v + g^t PP^t v = e$$

  Y con los cambios de variables $u = P^t v$ y $\bar{g} = P^t g$ llegamos al a expresión canonica de la conica:

  $$u^t Du + \bar{g}^t u = e \Leftrightarrow \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \bar{f} u_1 + \bar{d} u_2 = e$$

- **[Identificando Cónicas]**:
  Dado una conica del tipo:

  $$\lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \bar{f} u_1 + \bar{d} u_2 = e$$

  Tenemos que:

  (I) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ tenemos

- **Conjunto vació** si y solo si $\bar{d} = \bar{f} = 0$ y $e \neq 0$.
- **Recta** si y solo si $\bar{d} \neq 0$ o $\bar{f} \neq 0$ o $e = 0$.

(II) Si $\lambda_1 \neq 0 \wedge \lambda_2 \neq 0$ tenemos que si llevamos la expresión a la forma $\lambda_1(u_1')^2 + \lambda_2(u_2')^2 = \bar{e}$

- **Elipse** si y solo si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y $(\lambda_1, \lambda_2, \bar{e} > 0 \vee \lambda_1, \lambda_2, \bar{e} < 0)$.
- **Circunferencia** si y solo si $\lambda_1 = \lambda_2$ y $(\lambda_1, \lambda_2, \bar{e} > 0 \vee \lambda_1, \lambda_2, \bar{e} < 0)$.
- **Hipérbola** si y solo si $\lambda_1\lambda_2 < 0$ y $\bar{e} \neq 0$.
- **Recta** si y solo si $\lambda_1\lambda_2 < 0$ y $\bar{e} = 0$.
- **Punto** si y solo si $\lambda_1\lambda_2 > 0$ y $\bar{e} = 0$.
- **Conjunto vacío** si y solo si $(\lambda_1, \lambda_2 > 0 \wedge \bar{e} < 0)$ o $(\lambda_1, \lambda_2 < 0 \wedge \bar{e} > 0)$

(III) $\lambda_1 \neq 0 \veebar \lambda_2 \neq 0$, supongamos, por ejemplo que $\lambda_1 = 0$, en sistema se puede llevar a la forma $\lambda_2(u_2')^2 + \bar{f}u_1' = \bar{e}$, en donde:

- **Recta** si y solo si $\bar{f} = 0 \wedge \frac{\bar{e}}{\lambda_i} \geq 0$, con $\lambda_i \neq 0$.
- **Conjunto vacío** si y solo si $\bar{f} = 0 \wedge \frac{\bar{e}}{\lambda_i} < 0$, con $\lambda_i \neq 0$
- **Parábola** si y solo si $\bar{f} \neq 0$