MA1102-3: Álgebra Lineal
Profesor: Jaime San Martín
Auxiliar: Felipe Hernández Castro

Resumen - Algebra Lineal

23 de Diciembre de 2018

1.- Matrices

- **[Producto de matrices]**: Dadas $A \in \mathcal{M}_{mr}(\mathbb{K})$,$B \in \mathcal{M}_{rn}(\mathbb{K})$ se define el producto $C = AB$ como aquella matriz $C \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ tal que:
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}, \quad i = 1, ..., m, j = 1, ..., n.$$

- **[Igualdad de matrices]**: Diremos que dos matrices A,$B \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$ son iguales si es que $\forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, m$ se tiene que $a_{ij} = b_{ij}$

- **[Notación: filas y columnas]** Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ notaremos su i-ésima fila como:
$$A_{i\bullet} = (a_{i1}a_{i2}\dots a_{in})$$
y su j-ésima columna:
$$A_{\bullet j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$
Podemos escribir entonces la matriz: $A = (A_{\bullet 1}, A_{\bullet 2}, \dots, A_{\bullet n})$ denominada notación por columnas. O bien:
$A = \begin{pmatrix} A_{1\bullet} \\ A_{2\bullet} \\ \vdots \\ A_{m\bullet} \end{pmatrix}$, correspondiente a la notación por filas.

- **[Matriz invertible]**: Diremos que $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ es **invertible** si y solo si $\exists B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ tal que:
$$AB = BA = I$$
De existir B, esta es **única**. Así, anotamos $B = A^{-1}$.

- **[Matriz traspuesta]** Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$, se define la matriz **traspuesta** de A como aquella matriz de $n \times m$ que denotaremos por A^t tal que $(A^t)_{ij} = (A)_{ji}$.

- **[Matriz simetrica]** Diremos que $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ es **simétrica** si y sólo si $A = A^t$.

- **[Matriz Nilpotente]** Diremos que una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ es **Nilpotente** si y solo si $\exists k \in \mathbb{N}, A^k = 0$.

2.- Sistemas de ecuaciones

- **[Matriz de permutación]**: Se define la matriz elemental de permutación I_{pq} como la matriz que se construye a partir de la identidad, permutando las filas p y q.

- **[Permutación de filas y columnas]**: Dada una matriz elemental de permutación $I_{pq} \in \mathcal{M}_{nn}$, $A \in \mathcal{M}_{nm}$ y $B \in \mathcal{M}_{sn}$ se tiene que:
  - $I_{pq}A$ corresponde a la matriz A con las filas p y q permutadas.
  - BI_{pq} corresponde a la matriz B con las columnas p y q permutadas.

- **[Matriz de suma]**: Se define la matriz elemental de suma $E_{p,q}(\lambda) \in \mathcal{M}_{nn}$ como la que se construye a partir de la identidad, agregando λ a la posición (q, p) (columna p y fila q).

- [**Suma y ponderación de filas**]: Dada una matriz elemental de suma $E_{p,q}(\lambda) \in \mathcal{M}_{nn}$ y una matriz $A \in \mathcal{M}_{nm}$ cualquiera, se tiene que:
  - Si $p < q$, $E_{p,q}(\lambda)A$ entrega la misma matriz A pero en la fila q, se le suma la fila p multiplicada por λ, es decir:

$$E_{p,q}(\lambda)A = \begin{pmatrix} A_{1\bullet} \\ \vdots \\ A_{p\bullet} \\ \vdots \\ A_{q\bullet} + \lambda A_{p\bullet} \\ \vdots \\ A_{n\bullet} \end{pmatrix}$$

  - Si $p = q$, $E_{p,p}(\lambda)A$ entrega la misma matriz A pero con la fila p ponderada por λ, es decir:

$$E_{p,p}(\lambda)A = \begin{pmatrix} A_{1\bullet} \\ \vdots \\ \lambda A_{p\bullet} \\ \vdots \\ A_{n\bullet} \end{pmatrix}$$

- [**Inversa de la matriz de suma**]: $E_{p,q}(\lambda)$ es **invertible**. Su inversa es $E_{p,q}(\lambda)^{-1} = E_{p,q}(-\lambda)$
- [**Propiedad importante**]: Dada una matriz C invertible, se tiene que $a \in \mathbb{K}^n$ es solución de $Ax = b$
$\Longleftrightarrow$ a es solución de $(CA)x = Cb$.
- [**Sistema compatible**]: Dado el sistema $Ax = b$, diremos que es compatible si existe al menos una solución.
- [**Propiedad 1**]: Dado el sistema $Ax = b$, sea $\tilde{A}$ un escalonamiento de A. Si $Ax = b$ es compatible y en $\tilde{A}$ existe un peldaño de largo mayor o igual a 2, entonces existen infinitas soluciones.
Obs.: Si $A \in \mathcal{M}_{nm}$ con $n > m$, entonces el sistema tiene infinitas soluciones (pues como $n > m$ existen mas incognitas que ecuaciones).
- [**Propiedad 2**]: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}$, entonces las proposiciones siguientes son equivalentes:
  1. A es invertible.
  2. $\forall b \in \mathbb{K}^n$, $Ax = b$ tiene solución única.
  3. $\prod_{i=1}^n \tilde{a}_{ii} \neq 0$.
- [**Propiedad 3**]: Una matriz triangular superior (inferior) es invertible si y sólo si todos sus elementos en la diagonal son no nulos.

3.-Geometría

- [**Recta**]: Sean p, $d \in \mathbb{R}^n$, llamaremos recta al conjunto L dado por:

$$L_{p,d} = \{v \in \mathbb{R}^n | v = p + \alpha d, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

- [**Vectores paralelos**]: Sean v, $w \in \mathbb{R}^n$, diremos que son paralelos ($x \parallel y$) si $\exists \lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ tal que $v = \lambda w$
- [**Plano**] Sean p, d_1, $d_2 \in \mathbb{R}^n$, llamaremos plano al conjunto Π dado por:

$$\Pi_{p,d_1,d_2} = \{v \in \mathbb{R}^n | v = p + \alpha d_1 + \beta d_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

- [**Producto punto en** $\mathbb{R}^n$] Dados $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$ se define el producto punto $\langle x, y\rangle$ como:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x^t y = y^t x$$

- [**Norma Euclidiana** $\|\cdot\|$] Dado $x \in \mathbb{R}^n$ define la norma euclidiana como $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\langle x, x\rangle}$
- [**Vectores ortogonales**] Sean v, $w \in \mathbb{R}^n$, diremos que son ortogonales ($x \perp y$) si $\langle v, w\rangle = 0$
- [**Desigualdad Cauchy-Schwartz**] Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$, en donde la igualdad se da solo si $(x = 0) \vee (y = 0) \vee (x \parallel y)$

- **[Producto cruz]**: Sean x, $y \in \mathbb{R}^3$, tales que $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, definimos el producto cruz $x \times y$ como el siguiente vector:

$$x \times y = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

En donde:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

- **[Propiedades del producto cruz]**:
  - $x \times x = 0$
  - $v \times (x + y) = v \times x + v \times y$, es decir, el producto cruz distribuye con respecto a la suma.
  - Si $z = x \times y$, entonces z es perpendicular a x e y, es decir: $\langle z, x \rangle = 0 = \langle z, y \rangle$
  - $x \times y = -y \times x$, es decir, el producto cruz es antisimétrico.
  - La norma del producto cruz esta dada por $\|x \times y\| = \|x\| \|y\| |sen\theta|$ con θ el ángulo que subtienden x e y.
  - Dados $x, y \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ tales que $x \times y = 0$ entonces $(x \parallel y)$

- **[Proyección de un punto a una recta]**: Sea $L : p + \lambda d$ una recta y q un punto en $\mathbb{R}^3$. Si llamamos r a la proyección de q sobre L , entonces tenemos que:

$$r = p + \langle q - p, \hat{d} \rangle \hat{d}$$

Donde $\hat{d} = \frac{d}{\|d\|}$

- **[Proyección de un punto a un plano]**: Sea $\Pi : \langle x - p, n \rangle$ un plano y q un punto en $\mathbb{R}^3$. Si llamamos r a la proyección de q sobre Π , entonces tenemos que:

$$r = q + \langle p - q, \hat{n} \rangle \hat{n}$$

- **[Distancia de un punto a un plano]**: Dado un plano Π cuya ecuación cartesiana este dada por: $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$ y q un punto en $\mathbb{R}^3$. Entonces se tiene que:

$$d(q, \Pi) = \frac{|Aq_1 + Bq_2 + Cq_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

4.-Espacios Vectoriales

- **[Espacio Vectorial]**:
Dado un grupo abeliano $(V, +)$ y un cuerpo $\mathcal{K}$. Diremos que V es un espacio vectorial sobre $\mathcal{K}$ si y solo si $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{K}$, $\forall x, y \in V$:

EV1: $(\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$.
EV2: $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.
EV3: $\lambda(\beta x) = (\lambda\beta)x$.
EV4: $1 \cdot x = x$, donde 1 es el neutro multiplicativo del cuerpo $\mathcal{K}$.

- **[Subespacio Vectorial]**:
Sea un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathcal{K}$. Diremos que un subconjunto $U \neq \emptyset$ de V, es un subespacio vectorial (s.e.v.) de V si cumple:
  - $\forall u, v \in U$, $u + v \in U$
  - $\forall \lambda \in \mathcal{K}$, $\forall u \in U$, $\lambda u \in U$

- **[Caracterización Subespacio Vectorial]**:
Sea un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathcal{K}$. Diremos que U es s.e.v. de V si cumple:
  - $0_V \in U$ (U no vació)
  - $U \subseteq V$
  - $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{K}$, $\forall u_1, u_2 \in U$, $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in U$

- **[Combinación Lineal]**:
Dado una colección $v_1, ..., v_n$ de vectores en un espacio vectorial V y de escalares $\lambda_1, ..., \lambda_n$ en $\mathcal{K}$.Denominamos combinación lineal a la suma ponderada de vectores:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

- **[Independencia Lineal]**:
Dado el conjunto de vectores $\{x_1, ..., x_n\}$, diremos que es linealmente independiente si:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \Longrightarrow \lambda_i = 0 \;\; \forall i \in \{1, ..., n\}$$

Con $\lambda_i \in \mathcal{K}$ escalares.

- **[Conjunto generador]**:
  Sea V un e.v., diremos que los vectores $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$ generan V si y solo si:

  $$\langle \{v_1, ..., v_n, \}\rangle = V$$

  Observación: Como $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$, la inclusion $\langle \{v_1, ..., v_n\}\rangle \subseteq V$ se tiene por definicion de espacio vectorial. Luego solo basta ver: $\forall v \in V, \exists \{\lambda_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{K}$ tal que $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$.

- **[Base]**:
  Dado un e.v V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, diremos que el conjunto de vectores $\{v_i\}_{i=1}^n$ es base de V si y sólo si:

  1. $\{v_i\}_{i=1}^n$ es l.i.
  2. $\{v_i\}_{i=1}^n$ genera V.

- **[Proposición 1]**:
  Dado un e.v V, $B = \{v_i\}_{i=1}^n$ es base si y sólo si $\forall v \in V$, v se escribe de manera única como combinación lineal de los vectores del conjunto B.

- **[Proposición 2]**: Si $X = \{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$ es un conjunto generador, entonces es posible extraer un subconjunto $B = \{v_{i_1}, ..., v_{i_s}\}$ que es base de V.

- **[Proposición 3]**:
  Si $B = \{v_i\}_{i=1}^n$ es base de V, y $X = \{w_i\}_{i=1}^m$ con $m > n$, entonces el conjunto X es *l.d.* .

- **[Teoremas de dimensión]**:

  1. Sea $dim\ V = n$. Si $\{v_i\}_{i=1}^n$ es l.i. o genera, entonces es base.
  2. Sea U s.e.v. de V, luego $dim\ U \leq dim\ V$, más aún se tiene que $dim\ U = dim\ V \Rightarrow U = V$.

- **[Teorema de completación de bases]**:
  Dado un e.v. V con $dim\ V = n$, y un conjunto de vectores l.i. $\{v_1, ..., v_r\}$, con $r < n$, entonces existen vectores $v_{r+1}, ..., v_n$, tales que el conjunto $\{v_1, ..., v_n\}$ es base de V.

- **[Suma de espacios vectoriales]**:
  Sean U, W s.e.v. de V, se define:

  $$U + W = \{v \in V | v = u + w, u \in U, w \in W\}.$$

  Observación: $U + W$ es s.e.v. de V.

- **[Suma Directa]**:
  Sean U, W s.e.v. de V, diremos que $Z = U + W$ es suma directa de U y W, denotando $U \oplus W = Z$ si $\forall v \in Z$ se escribe de manera unica como :

  $$v = u + w, \quad u \in U, w \in W.$$

- **[Caracterización de la suma directa]**:
  Dado V e.v. y U, W, Z s.e.v. de V, entonces:

  $$U \oplus W = Z \Leftrightarrow (Z = U + W) \wedge (U \cap W = \{0\})$$

- **[Dim de la suma directa]**:
  Sea V de dimensión finita.

  1. Si $V = U \oplus W$ y V, entonces $dim\ V = dim\ U + dim\ W$
  2. Si $V = U + W$ y V, entonces $dim\ V = dim\ U + dim\ W - dim\ U \cap W$

5.-Transformaciones lineales

- **[Transformación lineal]**:
  Sean U y V e.v, llamaremos transformación lineal a toda funcion $T : U \longrightarrow V$ tal que:

  1. $\forall u_1, u_2 \in U, T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$
  2. $\forall u \in U, \lambda \in K, T(\lambda u) = \lambda T(u)$

- **[Propiedades elementales]**:

  1. $T(0) = 0 \in V$
  2. $T(-u) = -T(u)$
  3. T es lineal si y solo si $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, \forall u_1, u_2 \in U$.

     $$T(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 T(u_1) + \lambda_2 T(u_2)$$

- **[Composición e inversa de lineas]**:

  - Sean $T : U \longrightarrow V$ y $L : V \longrightarrow W$ lineales. Luego $L \circ T : U \longrightarrow W$ es lineal.
  - Sea $T : U \longrightarrow V$ lineal y biyectiva. Entonces $T^{-1} : V \longrightarrow U$ es lineal.

- **[Kernel]**:
  Sea $T : U \longrightarrow V$ lineal. Se define el Kernel o Nucleo de T como:
  $$KerT = \{x \in U | T(x) = 0\}$$
  Observación: $KerT$ es un s.e.v. de U, llamaremos nulidad a $dim\ KerT$.

- **[Imagen]**:
  Sea $T : U \longrightarrow V$ lineal. Se define la imagen de T como:
  $$ImT = \{v \in V | \exists u \in U, T(u) = v\} = T(U)$$
  Observación: ImT es un s.e.v. de V, llamaremos rango a $dim\ ImT$.

- **[Biyectividad de T]**:
  Sea $T : U \longrightarrow V$ lineal.
  1. T es inyectiva si y sólo si $KerT = \{0\}$
  2. T es isomorfismo si y sólo si $KerT = \{0\}$ y $ImT = V$ o equivalentemente $dim\ ImT = dim\ V$ y $dim\ KerT = 0$
  3. Si T es inyectiva entonces $\{u_i\}_{i=1}^k$ es l.i. $\Rightarrow$ $\{T(u_i)\}_{i=1}^k$ es l.i.

- **[TNI]**:
  Sean U, V e.v's, y $T : U \longrightarrow V$ lineal, tal que $dim\ U < \infty$. Entonces:
  $$dim\ U = dim\ KerT + dim\ ImT$$

- **[Teoremas de inyectividad y epiyectividad]**:
  Sea $T : U \longrightarrow V$ lineal.
  1. Si $dim\ U = dim\ V$ entonces T inyectiva $\Leftrightarrow$ T epiyectiva.
  2. Si $dim\ U > dim\ V$ entonces T no es inyectiva.
  3. Si $dim\ U < dim\ V$ entonces T no es epiyectiva.
  4. $U \cong V \Leftrightarrow dim\ U = dim\ V$.

- **[Matriz representante]**:
  Sea $T : U \to V$ lineal, y sean $\beta_U = \{u_1, ..., u_n\}$ y $\beta_V = \{v_1, ..., v_m\}$ bases de U y V respectivamente, entonces llamaremos matriz representante de T con respecto a las bases β_U y β_V a la matriz $M_{\beta_U\beta_V}(T)$ que se construye a través de los coeficientes obtenidos al expresar cada $T(u_i)$ como combinación lineal de los vectores de la base β_V, es decir:
  $$\begin{aligned} T(u_1) &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + ... + a_{m1}v_m \\ T(u_1) &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + ... + a_{m2}v_m \\ &\vdots \\ T(u_n) &= a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + ... + a_{mn}v_m \end{aligned} \qquad M_{\beta_U\beta_V}(T) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- **[Matriz representante de la composición]**:
  Sean $T : U \to V$, $L : V \to W$ aplicaciones lineales, tales que β_U, β_V y β_W son bases de U, V y W respectivamente, entonces se tiene que:
  $$M_{\beta_U\beta_W}(L \circ T) = M_{\beta_V\beta_W}(L) M_{\beta_U\beta_V}(T)$$
  Observación: En particular, podemos notar que $T = id_V \circ T \circ id_U$, luego si nos piden encontrar la matriz representante de T con respecto a las bases $\bar{\beta}$ y $\bar{\beta}'$ (de U y V resp.), siempre podemos pasar por las bases canónicas (β y β') si es que esto hace el proceso mas fácil, de manera que $M_{\bar{\beta}\bar{\beta}'}(T) = M_{\beta'\bar{\beta}'}(id_V) M_{\beta\beta'}(T) M_{\bar{\beta}\beta}(id_U)$.

$$\begin{tikzcd}
U, \overline{\beta} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "id_U"'] & V, \overline{\beta}' \\
U, \beta \arrow[r, "T"] & V, \beta' \arrow[u, "id_V"']
\end{tikzcd}$$

- [**Matrices semejantes**]:
  Dos matrices A y B se dirán semejantes si existen matrices P y Q invertibles tales que:

  $$A = PBQ$$

  Si $Q = P^{-1}$ diremos que las matrices son similares.

- [**Rango**]:
  Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}$, se define $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $T(x) = Ax$. Llamaremos rango de la matriz A a la dimensión de la imagen de T, es decir $r(A) = dim \;\; ImT$.

- [**Propiedades del Rango**]:

  (I) Dos matrices A y B son semejantes si y solo si $r(A) = r(B)$.

  (II) El rango de una matriz es el numero de columnas (filas) l.i.

  (III) $r(AB) \leq min\{r(A), r(B)\}$.

  (IV) Sea $A \in \mathcal{M}_{pq}$, se tiene que $r(A) = r(A^t) \leq min\{p, q\}$.

6.-Valores y vectores propios

- [**Vector y valor propio**]:
  Diremos que $x \in V$ es vector propio de $L : V \to V$ si:

  1. $x \neq 0$
  2. $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tal que $L(x) = \lambda x$.

  Observación: De igual manera, diremos que $x \in V - \{0\}$ es vector propio de la matriz A, si es vector propio de la aplicación lineal $L(x) = Ax$, en donde:

  $$Ax = \lambda x$$

  .De la misma manera decimos que λ es valor propio de A.

- [**Proposición 1**]:
  Dado $A \in \mathcal{M}_{nn}$, son equivalentes:

  1. $\exists x \neq 0$, $Ax = \lambda x$.
  2. $\exists x$ solución no trivial del sistema $(A - \lambda I)x = 0$
  3. $Ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$
  4. $(A - \lambda I)$ no es invertible.

- [**Polinomio Característico**]:
  Llamaremos polinomio característico de una matriz A a $P(\lambda) = |A - \lambda I|$.

- [**Propiedades varias**]:

  1. Todo vector propio tiene asociado un único valor propio.
  2. Cada valor propio tiene un subespacio de vectores propios asociados, el cual llamaremos subespacio propio W_λ.
  3. Si A y B son similares entonces tienen el mismo polinomio característico, es decir $|A - \lambda I| = |B - \lambda I|$ y por ende los mismo valores propios asociados.

4. La traza de una matriz es igual a la suma de sus valores propios: $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

[**Algunas propiedades del determinante**]:

1. $|I| = 1$ donde I es la identidad.
2. Si A es triangular superior entonces $|A| = \Pi_{i=1}^{n} a_{ii}$
3. A es invertible si y solo si $|A| \neq 0$
4. $|AB| = |A||B|$
5. $|A| = |A^t|$

- [**Similar a una diagonal**]:
Si una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ es similar a una matriz D ($A = PDP^{-1}$) se tendrán las siguientes propiedades:

  1. $r(A) = r(D) =$ Valores propios no nulos
  2. Si A es invertible $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$
  3. $A^m = PD^mP^{-1}$

- [**Matriz diagonalizable**]:
Diremos que $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ es diagonalizable si y sólo si admite una base de vectores propios de A.

- [**Vectores propios l.i.**]:
Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, si $\{\lambda_i\}_{i=1,...,k}$ son valores propios distintos de A asociados a los vectores propios $\{v_i\}_{i=1,...,k}$, entonces $\{v_i\}_{i=1,...,k}$ es l.i. .

- [**Suma directa multiple**]:
Sea V e.v. y $\{U_i\}_{i=1,...,k}$ una familia de s.e.v's de V. Diremos que $Z = +_{i=1}^{k} U_i$ es suma directa, notado $Z = \bigoplus_{i=1}^{k} U_i$ si para todo $v \in Z$, v se escribe de manera unica como:

$$v = \sum_{i=1}^{k} u_i, \qquad \text{con } u_i \in U_i, \qquad \forall i \in \{1, ..., k\}.$$

  Observación: Para ver equivalencias, favor leer proposición 5.4 del apunte.

- [**Multiplicidad geométrica y algebraica**]:
Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ y λ un valor propio de A. Definimos:

  1. La multiplicidad geométrica de λ, $\gamma_A(\lambda)$, como la dimension del espacio propio $W_\lambda = Ker(A - \lambda I)$.
  2. La multiplicidad algebraica de λ, $\alpha_A(\lambda)$, como la máxima potencial de $(x - \lambda)$ que divide al polinomio característico de A.

- [**Desigualdad de multiplicidades**]:
Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ y λ un valor propio. Entonces:

$$1 \leq \gamma_A(\lambda) \leq \alpha_A(\lambda) \leq n$$

- [**Equivalencias Diagonalizable**]:
Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, las siguientes proposiciones son equivalentes:

  1. A es diagonalizable.
  2. A es similar a una matriz diagonal.
  3. La suma de las multiplicidades geométricas es n.
  4. Para cada valor propio λ se tiene $\alpha_A(\lambda) = \gamma_A(\lambda)$
  5. Si $\{\lambda_i\}_{i=1,...,k}$ son los valores propios distintos de A, se tiene $\mathbb{K}^n = W_{\lambda_1} \oplus W_{\lambda_2} \oplus ... \oplus W_{\lambda_k}$

7.-Ortogonalidad

- [**Conjunto ortonormal**]:
Un conjunto $\{v_i\}_{i=1}^{k} \subset \mathbb{R}^n$ se dice ortogonal si $\langle v_i, v_j \rangle =$ para todo $i \neq j$. Si además $||v_i|| = 1$ para todo i, entonces diremos que el conjunto es ortonormal.

- [**Propiedades**]:

  (a) Un conjunto ortogonal es l.i.
  (b) Todo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ posee una base ortonormal.

- [**Proyección**]:
Sea W un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$, con $\{v_i\}_{i=1}^{k}$ una base ortonormal de W y sea $x \in \mathbb{R}^n$. Llamaremos proyección ortogonal de x sobre W al vector:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x, u_i \rangle u_i \quad \in \quad W$$

  Se cumple que:

  (a) $P(x) - x \perp w, \quad \forall w \in W$
  (b) $x \in W \iff P(x) = x$
  (c) $P(x)$ minimiza la distancia entre x y W : $d(x, P(x)) = mín_w d(x, w)$.
  (d) P es una transforación lineal.

- **[Subespacio ortogonal]**:
Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$, se define el ortogonal de W como:
$$W^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n | \forall\ w \in W, \quad \langle w, u\rangle = 0\}$$
Este conjunto cumple las siguientes propiedades:
  (a) $W^\perp$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.
  (b) $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$.

- **[Producto hermítico]**:
Dados $u, v \in \mathbb{C}^n$, definimos el producto hermítico como:
$$\langle u, v\rangle_H = \sum_{i=1}^{n} u_i \bar{v_i}$$

- **[Adjunta]**:
Se define la adjunta de una matriz A como $A^* = \bar{A}^t$. Si $A^* = A$, decimos que A es hermítica.
Observación: Si $A \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$ es hermítica, entonces $A = A^t$

- **[Espectro]**:
Se define el espectro de una matriz A como:
$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} |\ |A - \lambda I| = 0\}$$

- **[Vectores propios ortogonales]**:
Si A es simétrica (o hermitica) y v_1, v_2 son dos vectores propios asociados a dos valores propios distintos, entonces $\langle v_1, v_2\rangle = 0$

- **[Diagonalización de simetricas]**:
Si A es simétrica, entonces existe una base ortonormal $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de vectores propios, luego existen P y D tales que $A = PDP^t$ donde $P^{-1} = P^t$

8.-Formas Cuadráticas

- **[Forma cuadrática]**:
Dado una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}$ simétrica, definimos $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por $q(x) = x^t Ax$, en donde llamamos q por forma cuadrática.

- **[(Semi) Definida positiva/negativa]**:
Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}$ simetrica, diremos que
  (I) A es definida positiva si $\forall x \neq 0 \ \ x^t Ax > 0$
  (II) A es semidefinida positiva si $\forall x \ \ x^t Ax \geq 0$
  (III) A es definida negativa si $\forall x \neq 0 \ \ x^t Ax < 0$
  (IV) A es semidefinida negativa si $\forall x \ \ x^t Ax \leq 0$

Observación: A es definida (semidefinida) positiva ssi $-A$ es definida (semidefinida) negativa.

- **[Equivalencias definida positiva]**:
Sea una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}$ simétrica. Las siguientes proposiciones son equivalentes:
  (I) A es definida positiva.
  (II) Los valores propios de A son positivos.
  (III) El método de Gauss permite escalonar A con pivotes siempre positivos utilizando solo matrices elementales de suma.

- **[Descomposición de Cholesky]**:
Dado una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}$, esta admite una descomposición de Cholesky si existe matriz R triangular inferior, cuyos terminos de la diagonal son estrictamente mayores a 0, tal que:
$$A = RR^t$$
Observación: A es definida positiva si y solo si admite una descomposición de Cholesky.

- **[Forma canonica]**:
Dado una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}$ simetrica, su forma cuadratica sera
$$x^t Ax = x^t PDP^t x = (P^t x)^t DP^t x$$
Si hacemos el cambio de variable $y = P^t x$ llegaremos a la forma canonica:
$$x^t Ax = y^t Dy = \sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2$$

- **[Homotecia]**:
Dado una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}$ simétrica y su forma cuadrática $x^t Ax$, tenemos que existe matriz L invertible tal que si $z = Lx$ entonces en terminos de las variables z la forma cuadratica se expresa como $\bar{q}(z) = z_1^2 + ... + z_p^2 - (z_{p+1}^2 + ... + z_r^2)$, donde $r = \mathit{rango}(A) = \mathit{numero\ de\ valores\ propios} \neq 0$ y $p = \mathit{numero\ de\ valores\ propios} > 0$

- **[Cónicas]**:
  Llamaremos cónica en $\mathbb{R}^2$ al conjunto solución de la ecuación:

  $$ax^2 + by^2 + 2cxy + dy + fx = e$$

  La cual se puede escribe matricialmente como:

  $$v^tAv + g^tv = e$$

  Con $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} d \\ f \end{pmatrix}$. Si además $A = PDP^t$, tendremos que:

  $$v^tPDP^tv + g^tPP^tv = e$$

  Y con los cambios de variables $u = P^tv$ y $\bar{g} = P^tg$ llegamos al a expresión canonica de la conica:

  $$u^tDu + \bar{g}^tu = e \Leftrightarrow \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \bar{f}u_1 + \bar{d}u_2 = e$$

- **[Identificando Cónicas]**:
  Dado una conica del tipo:

  $$\lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \bar{f}u_1 + \bar{d}u_2 = e$$

  Tenemos que:

  (I) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ tenemos
  - **Conjunto vació** si y solo si $\bar{d} = \bar{f} = 0$ y $e \neq 0$.
  - **Recta** si y solo si $\bar{d} \neq 0$ o $\bar{f} \neq 0$ o $e = 0$.

  (II) Si $\lambda_1 \neq 0 \wedge \lambda_2 \neq 0$ tenemos que si llevamos la expresión a la forma $\lambda_1(u_1')^2 + \lambda_2(u_2')^2 = \bar{e}$
  - **Elipse** si y solo si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y $(\lambda_1, \lambda_2, \bar{e} > 0 \vee \lambda_1, \lambda_2, \bar{e} < 0)$.
  - **Circunferencia** si y solo si $\lambda_1 = \lambda_2$ y $(\lambda_1, \lambda_2, \bar{e} > 0 \vee \lambda_1, \lambda_2, \bar{e} < 0)$.
  - **Hipérbola** si y solo si $\lambda_1\lambda_2 < 0$ y $\bar{e} \neq 0$.
  - **Recta** si y solo si $\lambda_1\lambda_2 < 0$ y $\bar{e} = 0$.
  - **Punto** si y solo si $\lambda_1\lambda_2 > 0$ y $\bar{e} = 0$.
  - **Conjunto vacío** si y solo si $(\lambda_1, \lambda_2 > 0 \wedge \bar{e} < 0)$ o $(\lambda_1, \lambda_2 < 0 \wedge \bar{e} > 0)$

  (III) $\lambda_1 \neq 0 \veebar \lambda_2 \neq 0$, supongamos, por ejemplo que $\lambda_1 = 0$, en sistema se puede llevar a la forma $\lambda_2(u_2')^2 + \bar{f}u_1' = \bar{e}$, en donde:
  - **Recta** si y solo si $\bar{f} = 0 \wedge \frac{\bar{e}}{\lambda_i} \geq 0$, con $\lambda_i \neq 0$.
  - **Conjunto vacío** si y solo si $\bar{f} = 0 \wedge \frac{\bar{e}}{\lambda_i} < 0$, con $\lambda_i \neq 0$
  - **Parábola** si y solo si $\bar{f} \neq 0$

[Metodo de G-S]

Dado un conjunto $V = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ **l.i.**, el método de Gram-Schmidt entrega una base ortonormal $U = \{u_1, u_2, ..., u_k\}$ del subespacio generado por V ($\langle V \rangle$). El método se define como sigue:

1. **(Caso base)** Se parte extrayendo un elemento arbitrario de V normalizándolo: $u_1 = \frac{v_1}{||v_1||}$, de manera que en el primer paso obtenemos el conjunto $U_1 = \{u_1\}$

2. **(Iteración)** Dado $U_i = \{u_1, ..., u_i\}$, se obtiene u_{i+1} como sigue:

   $$u_{i+1} = \frac{v_{i+1} - P_{U_i}(v_{i+1})}{||v_{i+1} - P_{U_i}(v_{i+1})||}$$

   Donde $P_{U_i}(v_{i+1})$ es la proyección ortogonal de v_{i+1} sobre U_i. Así se obtiene $U_{i+1} = \{u_1, ..., u_i, u_{i+1}\}$.

Así, el método parte con U_1, con el cual se genera U_2, y así iterativamente, hasta formar $U_k = U$ (pues V tiene k elementos).