Pauta auxiliar 14

P1]
- A diagonalizable
- Tiene un único valor propio.

P.D.Q. $\exists \alpha \in \mathbb{R},\ A = \alpha I$

En efecto: Sea λ el único valor propio de A.

Como A es diagonalizable:

$$A = P D P^{-1}$$

Y como λ es el único valor propio de A:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = \lambda I$$

Así:

$$\begin{aligned} A = P D P^{-1} = P(\lambda I) P^{-1} &= \lambda P I P^{-1} \\ &= \lambda P P^{-1} \\ &= \lambda I \end{aligned}$$

$\therefore\ \alpha = \lambda$ y $A = \lambda I$ //

Pauta Auxiliar 14

P2

(a) • A es simetrica

• $P_A(\lambda) = -\lambda(\lambda-3)^2$

• $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1}$ y $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2}$ son vectores propios.

Para encontrar A, como A es simetrica la diagonalizaremos! (pues A simetrica $\Rightarrow$ A diagonalizable).

Para eso, encontremos una base de vectores propios primero:

- Como $P_A(\lambda) = -\lambda(\lambda-3)^2$ se tendra que $\lambda=0$ y $\lambda=3$ son valores propios con $\alpha(0)=1$ y $\alpha(3)=2$

- ¿A que valor propio estan asociados los vectores propios dados? Como A es simetrica, vectores propios asociados a valores propios distintos son ortogonales. Notemos que:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -1 \neq 0 \therefore \text{No son ortogonales,}$$

Luego pertenecen al mismo valor propio, y como

$\gamma(0) = \alpha(0) = 1$ y $\gamma(3) = \alpha(3) = 2$, son valores propios

Iguales pues A es diagonalizable al ser simetrica.

asociados a $\lambda=3$.

$\therefore$ Falta hallar el vector propio asociado a $\lambda = 0$.

Como estamos en $\mathbb{R}^3$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ serán ortogonales a este, lo podemos obtener con el producto cruz!:

$$v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es la base buscada (es claramente l.i. y posee 3 términos)

Podríamos determinar A como $A = P D P^{-1}$, pero para ahorrarnos calcular una inversa, ortonormalizaremos la base encontrada. Como v_3 ya es perpendicular con v_1 y v_2, aplicaremos G-S sobre $\{v_1, v_2\}$ y $\{v_3\}$ por separado:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{v_2 - P_{u_1}(v_2)}{\| v_2 - P_{u_1}(v_2) \|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left[\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]}{\| v_2 - P_{u_1}(v_2) \|}$$

$$u_2 = \frac{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}}{\|v_2 - P_{u_1}(v_2)\|} = \frac{\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

✓ $$u_3 = \frac{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \{u_1, u_2, u_3\} = \left\{ \begin{pmatrix}\sqrt{2}^{-1}\\-\sqrt{2}^{-1}\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sqrt{6}^{-1}\\\sqrt{6}^{-1}\\2\sqrt{6}^{-1}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\sqrt{3}^{-1}\\-\sqrt{3}^{-1}\\\sqrt{3}^{-1}\end{pmatrix} \right\}$$

es base ortonormal de $\mathbb{R}^3$

Así:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix}\sqrt{2}^{-1} & \sqrt{6}^{-1} & -\sqrt{3}^{-1}\\ -\sqrt{2}^{-1} & \sqrt{6}^{-1} & -\sqrt{3}^{-1}\\ 0 & 2\sqrt{6}^{-1} & \sqrt{3}\end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix}\sqrt{2}^{-1} & -\sqrt{2}^{-1} & 0\\ \sqrt{6}^{-1} & \sqrt{6}^{-1} & 2\sqrt{6}^{-1}\\ -\sqrt{3}^{-1} & -\sqrt{3}^{-1} & \sqrt{3}^{-1}\end{bmatrix}}_{P^T}$$

$$= \begin{bmatrix}3\sqrt{2}^{-1} & 3\sqrt{6}^{-1} & 0\\ -3\sqrt{2}^{-1} & 3\sqrt{6}^{-1} & 0\\ 0 & 6\sqrt{6}^{-1} & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\sqrt{2}^{-1} & -\sqrt{2}^{-1} & 0\\ \sqrt{6}^{-1} & \sqrt{6}^{-1} & 2\sqrt{6}^{-1}\\ -\sqrt{3}^{-1} & -\sqrt{3}^{-1} & \sqrt{3}^{-1}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{3}{2}+\frac{3}{6}\right) & \left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{6}\right) & 1 \\ \left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{6}\right) & \left(\frac{3}{2}+\frac{3}{6}\right) & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Obs: Para comprobar pueden ver que es simétrica, y que la traza (suma de coeficientes en la diagonal) da la suma de valores propios:

$$2+2+2 = 3+3+0$$

(b)

$$C = \begin{bmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

¿Para que valores de a y b, C es diagonalizable?

Es claro que $\lambda = 2$ es único valor propio con $\alpha(2) = 3$:

$$P(\lambda) = |C - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda^{+} & a & 0 \\ 0^{-} & 2-\lambda & b \\ 0^{+} & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

Por 1ra columna $\Rightarrow$

$$= (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & b \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^3$$

Luego C es diagonalizable ssi $\mu(2) = 3$ $(= \alpha(2))$

Por T. N. I. :

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Im}(C-2I) + \dim \operatorname{Ker}(C-2I)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3 = r(C-2I) + \mu(2)$$

Así $\mu(2) = 3 \Leftrightarrow r(C-2I) = 0$

Donde :

$$C-2I = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así $a = b = 0$ pues $r(C-2I) = 0 \Leftrightarrow C-2I = 0$

$\therefore$ para $a = b = 0$, C es diagonalizable.

Pauta Auxiliar 14

P3

- A diagonalizable
- $tr(A) = -4$
- los valores propios de $A^2 + 2A$ son $-1, 3$ y 8.

Calcular los valores propios de A.

La idea que los valores propios siguen el mismo comportamiento de A, usaremos eso para llegar a algo similar que A^2+2A pero con λ.

Sea λ valor propio de A. Luego:

$$Av = \lambda v$$

$$\to 2Av = 2\lambda v$$

$$\to A^2 v = A\lambda v = \lambda \underbrace{Av}_{=\lambda v} = \lambda^2 v$$

Así: $$(A^2+2A)\cdot v = A^2 v + 2Av = \lambda^2 v + 2\lambda v$$
$$= (\lambda^2 + 2\lambda)v$$

$\therefore$ $\lambda^2 + 2\lambda$ es valor propio de (A^2+2A)

y como $-1, 3$ y 8 son los valores propios, tenemos que:

$$\begin{cases} \lambda_1^2 + 2\cdot\lambda_1 = -1 \\ \lambda_2^2 + 2\cdot\lambda_2 = 3 \\ \lambda_3^2 + 2\cdot\lambda_3 = 8 \end{cases}$$ $\longrightarrow$ Sistema de ecuaciones

Reordenando:

$$\begin{cases} (\lambda_1+1)^2 = 0 \\ (\lambda_2 - 1)(\lambda_2 + 3) = 0 \\ (\lambda_3 - 2)(\lambda_3 + 4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1 \quad \vee \quad \lambda_2 = -3 \\ \lambda_3 = 2 \quad \vee \quad \lambda_3 = -4 \end{cases}$$

¿Cual opción es la correcta?

Usemos que $tr(A) = -4$ y que $tr(A)$ = suma de los valores propios

$$-4 = -1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$\Longleftrightarrow \quad -3 = \lambda_2 + \lambda_3$$

Donde la unica opción es que $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = -4$

$\therefore \{-1, 1, -4\}$ son los valores propios de A.

Pauta Auxiliar 14

P4) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $V = \langle \{v\} \rangle$.

Encontrar una base ortonormal de $V^{\perp}$.

Recordar que:

$$V^{\perp} = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in V \}$$

Como $V = \langle \{v\} \rangle$, si $y \in \langle \{v\} \rangle$

$\Rightarrow \quad y = \lambda v$

Luego si $x \in V^{\perp} \Rightarrow \langle x, y \rangle = 0$

$\Leftrightarrow \langle x, \lambda v \rangle = 0$

$\Leftrightarrow \lambda \langle x, v \rangle = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \langle x, v \rangle = 0$

Así: $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \Rightarrow x_1 - x_3 = 0$

$\Rightarrow x_3 = x_1$

$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ genera, y como es evidentemente l.i., es base de $V^{\perp}$

Notar que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ya es ortogonal $\therefore$

Solo basta normalizar:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es base ortonormal de $V^{\perp}$

Pauta Auxiliar 14

P5

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) Obtenemos el polinomio característico:

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

Para hacer aparecer un 0, sumamos: $C_2' = C_2 - C_1$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & \lambda-1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

Para hacer aparecer otro 0, sumamos: $f_2' = f_2 + f_1$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda^{+} & \lambda-1^{-} & 1 \\ 5-\lambda & 0^{+} & 2 \\ 1 & 0^{-} & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

Así, calculamos el determinante por la segunda columna:

$$P(\lambda) = -(\lambda-1)\cdot\left[(5-\lambda)(4-\lambda) - 2\right]$$

$$= -(\lambda-1)\left[20 - 9\lambda + \lambda^2 - 2\right]$$

$$= -(\lambda-1)\left[18 - 9\lambda + \lambda^2\right]$$

$$= -(\lambda-1)\left[(6-\lambda)(3-\lambda)\right]$$

$\therefore$ $\lambda = 1$, $\lambda = 3$ y $\lambda = 6$ son valores propios de A.

(6)

✓ Como todos sus valores propios son distintos:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha(1) = \mu(1) = 1 \\ \alpha(3) = \mu(3) = 1 \\ \alpha(6) = \mu(6) = 1 \end{array}\right\} \text{A diagonalizable ✓}$$

Para encontrar los vectores propios, resolvemos los sistemas asociados:

$\lambda = 1$

$$(A - 1 \cdot I) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_1' = f_1 - f_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2' = f_2 - 2 \cdot f_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Luego el sistema $(A - 1 I) v = 0$

Resulta en:

$$\begin{cases} -5 v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 + 3 v_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} v_3 = 0 \\ v_1 = -v_2 \end{cases}$$

Luego:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = v_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es base de W_1 al ser generador y claro l. i.

$\boxed{\lambda = 3}$

$$(A - 3I) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3' = f_3 - \frac{1}{2} f_2 - \frac{1}{2} f_1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego el sistema $(A - 3I)v = 0$ resulta en:

$$\begin{cases} 2v_2 + v_3 = 0 \\ 2v_1 + v_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_3 = -2v_2 \\ 2v_1 - 2v_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_3 = -2v_2 \\ v_1 = v_2 \end{cases}$$

Así: $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \\ v_2 \\ -2v_2 \end{pmatrix} = v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\therefore \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ es base de W_3 al ser generador y claro l.i.

$\lambda = 6$ Como ya obtuvimos 2 vectores propios, estamos en $\mathbb{R}^3$ y la matriz A es simétrica, el vector propio asociado a 6 tendrá que ser ortogonal, por ejemplo:

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Para comodidad, tomamos $\bar{v} = -\frac{1}{2} v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base de W_6 pues es l.i. y $g(6) = 1$.

$\therefore \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base de vectores propios de $\mathbb{R}^3$

(c) Notar que los vectores ya son ortogonales entre sí, $\therefore$ basta normalizar:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(d) Como A es simétrica y obtuvimos una base ortonormal de vectores propios, A se diagonaliza como sigue:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} -\sqrt{2}^{-1} & \sqrt{6}^{-1} & \sqrt{3}^{-1} \\ \sqrt{2}^{-1} & \sqrt{6}^{-1} & \sqrt{3}^{-1} \\ 0 & -2\sqrt{6}^{-1} & \sqrt{3}^{-1} \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} -\sqrt{2}^{-1} & \sqrt{2}^{-1} & 0 \\ \sqrt{6}^{-1} & \sqrt{6}^{-1} & -2\sqrt{6}^{-1} \\ \sqrt{3}^{-1} & \sqrt{3}^{-1} & \sqrt{3}^{-1} \end{bmatrix}}_{P^T}$$

Luego:

- $A^{-1} = P D^{-1} P^T = P \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{3} & \\ & & \frac{1}{6} \end{bmatrix} P^T$

- $A^n = P D^n P^T = P \begin{bmatrix} 1^n & & \\ & 3^n & \\ & & 6^n \end{bmatrix} P^T$