MA1102-3: Álgebra Lineal
Profesor: Jaime San Martín
Auxiliar: Felipe Hernández Castro

Auxiliar 14 - Preparación C3

19 de diciembre de 2018

P1. [P2 (a) Examen 2017]
Sea $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ diagonalizable con un único valor propio. Muestre que:

$$A = \alpha \mathbb{I}$$

para algún número real α, en donde $\mathbb{I}$ es la matriz identidad.

P2. [P1 C3 2013-2 (modificada)]

(a) Sea $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. Se sabe que el polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = -\lambda(\lambda - 3)^2 \text{ y que } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son vectores propios de A. Se pide construir la matriz A.

(b) Considere la matriz de $C \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ definida por

$$\begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

¿Para que valores de $a, b \in \mathbb{R}$ la matriz C es diagonalizable?.

P3. [P2 (b) C3 2014-1]
Sea $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ diagonalizable, con $tr(A) = -4$ calcular los valores propios de A sabiendo que los valores propios de $A^2 + 2A$ son $-1, 3$ y 8.

P4. Sea $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $V = \langle \{v\} \rangle$. Encuentre una base ortonormal de $V^{\perp}$.

P5. [P2 (b) C3 2014-1 (modificada)]
Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Determine el polinomio característico de A y verifique que $\lambda = 1$ es uno de sus valores propios.

(b) Determine los valores y vectores propios de A. ¿Es A diagonalizable?.

(c) Construya una base ortonormal de vectores propios de A.

(d) Diagonalice A, encuentre A^{-1} y A^n con $n \in \mathbb{N}$.