

Punto Auxiliar 13

P1 | A simétrica

i) Los únicos valores propios de A son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 0$
(con $d(1) = 1$ y $d(0) = n-1$)

ii) $A = uu^t$, para algún $u \in \mathbb{R}^n$ con $\|u\| = 1$

P.D.Q. : i) $\Leftrightarrow$ ii)

En efecto :

$\Rightarrow$ | Tenemos que A se diagonaliza tal que :

$$A = P D P^T$$

$\rightarrow$ En donde las columnas de P forman una base ortonormal de vectores propios.

La idea es llegar a algo del estilo $A = uu^t$, pero D está molestando, entonces la idea es escribir de otra forma D! tal que $D = \chi \cdot \chi^t$. Podemos notar que :

$$\bullet D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= e_1 \cdot e_1^t$$

Así :

$$A = P e_1 e_1^t P^t = P e_1 (P e_1)^t$$

Definiendo $u = P e_1$ se tiene que $A = uu^t$.

Ahora basta ver que $\|u\| = 1$

Para eso, notemos que:

$$u = P \cdot e_1 = (P)_{\bullet 1} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Primera columna de } P! \\ \text{y recordar que las columnas de } P \\ \text{son los vectores propios ortonormales!} \end{array} \right\} \therefore \|P_{\bullet 1}\| = 1 \Rightarrow \|u\| = 1$$

$\Leftarrow$ Sabemos que $A = UU^t$ y queremos encontrar los valores propios, como solo conocemos la estructura de A , usaremos la definición. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ valor propio asociado a $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Entonces:

$$Av = \lambda v \quad (\Rightarrow) \quad U \underbrace{U^t v}_{\text{Producto punto!!}} = \lambda v$$

$$(\Rightarrow) \quad U \underbrace{\langle u, v \rangle}_{\text{escalar}} = \underbrace{\lambda v}_{\text{escalar}}$$

$$\therefore u \parallel v \quad \text{si } \lambda \neq 0$$

Tenemos que $u \parallel v$, pero además como A es simétrico, existe una base de n vectores propios... ¿pueden ser paralelos a u n vectores que forman una base? ¿por ende son l.i.? NO! Para verlo más formalmente, dividámoslo por casos:

Caso $\lambda = 0$ Aquí $u \cdot \langle u, v \rangle = 0$ y como $u \neq 0$ (obviamente caso no trivial) pues $\|u\| = 1$

Tenemos que $\langle u, v \rangle = 0$ o sea $v \perp u$, es donde existen $n-1$ vectores que cumplen eso, pues $\dim \langle u \rangle^\perp = n-1$ (pues $\mathbb{R}^n = \langle u \rangle^\perp \oplus \langle u \rangle$) $\therefore \dim \langle u \rangle^\perp = n-1$

Como $\lambda \neq 0$ | Así $u \langle u, v \rangle = \lambda v \quad (1)$

Aún no sabemos que $\|u\|=1$, usemoslo! para eso,
le damos en hacer operaciones $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = u^t \cdot u \quad \therefore$

remultiplicamos por u^t :

$$u^t \cdot u \langle u, v \rangle = \lambda u^t \cdot v$$

$$\langle \Rightarrow \rangle \quad \langle u^t, u \rangle \langle u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$$

$$\langle \Rightarrow \rangle \quad \langle u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$$

$\downarrow$
 $\langle u, u \rangle = 1$

por $\|u\|=1$

Como en (1) $\lambda \neq 0$ y $v \neq 0$, $u \neq 0$,

tenemos que $\langle u, v \rangle \neq 0$, así:

$\lceil \lambda = 1 \rfloor$ y como $u \parallel v$, tenemos que

$$\lambda(1) = \langle u \rangle = 1 \quad \text{concluyendo}$$

Punto Auxiliar 13

P2

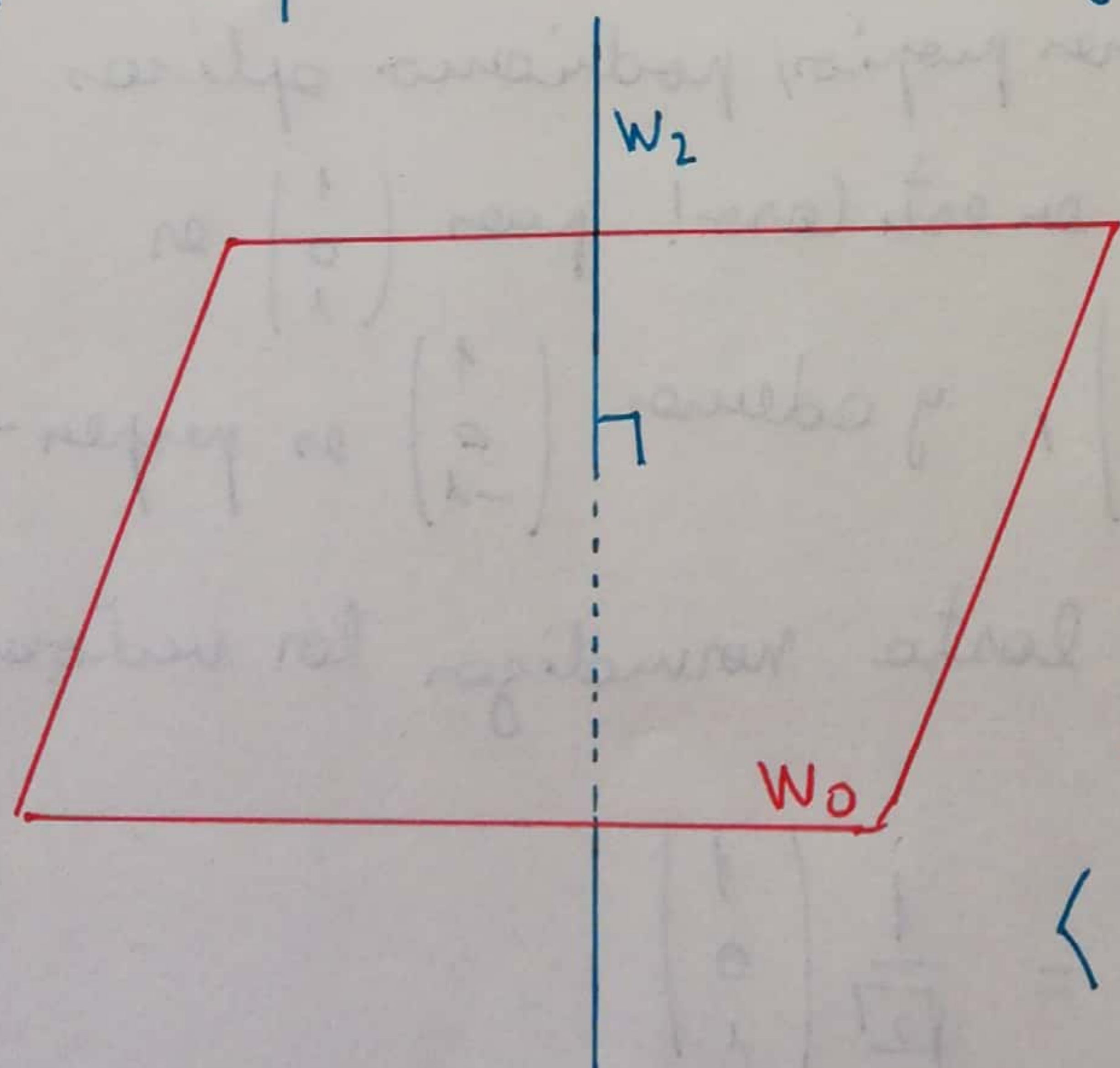
- A simétrica
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es vector propio de A asociado a 2
- $\dim \text{Ker } A = 2$

Calcular A .

La idea es encontrar una base de vectores propios ortonormal para escribir $A = P \Delta P^T$, ya que sabemos que $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 0$ son valores propios con $d_A(2) = 1$ y $d_A(0) = 2$ (pues $d_A(0) = \dim \text{Ker } A = p_A(0)$ al ser A diagonalizable por ser simétrica).

✓ para $\lambda_1 = 2$ ya tenemos $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

✓ para $\lambda_2 = 0$ tenemos que encontrar los dos vectores propios asociados. Para eso notamos que W_0 será un plano! pues estamos en $\mathbb{R}^3$ y $\dim W_0 = 2$:



Y como los vectores propios de W_0 son perpendiculares a los de W_2 (pues A es simétrica) tendremos que el plano W_0 tiene ecuación:

$$\left\langle v - 0, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

coef de posición
0 pues es e.v. $\therefore$
Pasa por el 0

vector propio
asociado a $\lambda_1 = 2$

$$\text{Luego } \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow v_1 + v_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow v_3 = -v_1$$

$$\therefore N = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

así $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ generan W_0 y es claro l.i.

$\therefore$ son base de vectores propios de W_0 . Así, tendremos el siguiente conjunto de vectores propios:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

ordenado
e 2

ordenado a 0

Lo cual es base de $\mathbb{R}^3$ (evidentemente son l.i.). Para obtener una base ortonormal de vectores propios, podríamos aplicar

G-S, pero no es necesario en este caso! pues $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es

perpendicular a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, y además $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ es perpen-

dicular con $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\therefore$ Solo falta normalizar los vectores.

$$\bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow u_1 = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow u_2 = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} u_3 = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \{u_1, u_2, u_3\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es base de vectores propios ortonormal.

Luego A se escribe:

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2}^{-1} & \sqrt{2}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{2}^{-1} & -\sqrt{2}^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}^{-1} & \sqrt{2}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{2}^{-1} & -\sqrt{2}^{-1} & 0 \end{bmatrix}^T$$

//

P3]

Ruta Auxiliar 13

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z + w = 0 \right\}$$

a) La idea es aplicar 6-5! $\therefore$ encontremos una base de U primero:

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Sea } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in U &\Rightarrow x - y - z + w = 0 \\ &\Rightarrow w = y + z - x \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ y + z - x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ es base de } U$$

(pues genera y claro l.i.)

Apliquemos 6-5!:

i) Tomamos $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ y normalizemos:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore U_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

(ii) Encontramos u_2 , para eso proyectamos $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_1$:

$$P_{U_1}(v_2) = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2}^{-1} \\ 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2}^{-1} \end{pmatrix}}_{u_1}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2}^{-1} \\ 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2}^{-1} \end{pmatrix}}_{u_1}$$

$$= \begin{pmatrix} -\sqrt{2}^{-1} \\ 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2}^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}^{-1} \\ 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2}^{-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego: $u_2 = \frac{v_2 - P_{U_1}(v_2)}{\|v_2 - P_{U_1}(v_2)\|} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + 1^2 + (\frac{1}{2})^2}}$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore U_2 = \{u_1, u_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2}^{-1} \\ 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2}^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{6}^{-1} \\ 2 \cdot \sqrt{6}^{-1} \\ 0 \\ \sqrt{6}^{-1} \end{pmatrix} \right\}$$

(iii) Encontramos u_3 , para eso proyectamos $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a U_2 :

$$P_{U_2}(v_3) = \sum_{i=1}^2 \langle u_i, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle u_i$$

$$= (-\sqrt{2})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}^{-1} \\ 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2}^{-1} \end{pmatrix} + (\sqrt{6})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{6}^{-1} \\ 2\sqrt{6}^{-1} \\ 0 \\ \sqrt{6}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/6 \\ 2/6 \\ 0 \\ 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/6 \\ 2/6 \\ 0 \\ 4/6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$u_3 = \frac{v_3 - P_{U_2}(v_3)}{\|v_3 - P_{U_2}(v_3)\|} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ 1/3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{3}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2}^{-1} \\ 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2}^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{6}^{-1} \\ 2\sqrt{6}^{-1} \\ 0 \\ \sqrt{6}^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (2\sqrt{3})^{-1} \\ -(2\sqrt{3})^{-1} \\ 3 \cdot (2\sqrt{3})^{-1} \\ (2\sqrt{3})^{-1} \end{pmatrix} \right\}$$

Completando b-s, luego U_3 es base ortonormal de U

(i) Sabemos que $\mathbb{R}^4 = U \oplus U^\perp$

$$\Rightarrow \dim \mathbb{R}^4 = 4 = \dim U + \dim U^\perp$$

$$\Rightarrow \dim U^\perp = 1 \quad \text{pues } \dim U = 3 \text{ por parte i)}$$

$\therefore$ debemos hallar una base de 1 elemento.

Para eso, recordemos que $V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

es base de U . Luego $\forall \alpha, \beta, \mu; \forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in U^\perp$:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \alpha \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle + \beta \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle + \mu \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

Como es $\forall \alpha, \beta, \mu$:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$\therefore$ tenemos el sistema:

$$\begin{cases} x - w = 0 \\ y + w = 0 \\ z + w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = w \\ y = -w \\ z = -w \end{cases} \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ -w \\ -w \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} w$$

Luego $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base de $U^\perp$, aplicando 6-5:

$$u_1^\perp = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base ortonormal de $U^\perp$

Punto Auxiliar 13

P4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

• $\lambda = 3$ es valor propio de A

a) Encuentra una base de W_3 .

Para eso, hay que resolver el sistema:

$$(A - 3I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esechémolos!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$E_{13}(-1) \cdot E_{12}(2)$ $\rightarrow$ $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\therefore -x + 2y - z = 0 \Rightarrow z = 2y - x$$

Ans: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2y - x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\therefore \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ genera W_3 y es base de
ser claramente l.i.

$$\therefore f_1(3) = 2$$

b) Como A es simétrica, es diagonalizable, $\therefore$ debe
existir otro valor propio tal que $3 = f_1(\lambda) + f_1(3)$

$$\Rightarrow f_1(\lambda) = 1$$

Para encontrarlo, recordemos que la suma de los
valores propios debe ser igual a la traza de la matriz
(suma de los elementos de la diagonal). Así:

$$3 + 3 + \lambda = 2 - 1 + 2$$

$$\Rightarrow 6 + \lambda = 3 \Rightarrow \lambda = -3$$

$\therefore \lambda = -3$ es valor prop con $f_1(-3) = 1$

Para encontrar la base de W_{-3} , podríamos resolver el
sistema asociado, pero observemos que $f_1(-3) = 1$ y
que los vectores propios asociados a -3 son perpendiculares
a los asociados a 3 . $\therefore$ para encontrar tal vector asociado
a -3 usaremos el producto cruz, pues W_3 es un plano!
y buscaremos un vector normal a él:

$$N = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i} \cdot 1 - \hat{j} \cdot 2 + \hat{k} \cdot 1$$

$$\therefore V = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ es base de } W_3$$

c) Como A es simétrico, existe una base ortogonal de vectores propios.

y sabemos que:

$$\bullet \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ es base de } W_3$$

$$\bullet \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ es base de } W_{-3}$$

Una opción es aplicar B-S sobre $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

Lo que es notar que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ya es perpendicular a $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

pues es vector propio asociado a valor propio distinto.

$\therefore$ podemos aplicar B-S por separado:

Para $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$: basta normalizar, obteniendo:

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$:

$$i) \text{ obtenemos } u_1: \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$$

(i) Obtenermos u_2 proyectando $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sobre U_1 :

$$P_{U_1} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{2}^{-1} \\ 0 \\ -\sqrt{2}^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}^{-1} \\ 0 \\ -\sqrt{2}^{-1} \end{pmatrix}$$
$$= (-2\sqrt{2}^{-1}) \begin{pmatrix} \sqrt{2}^{-1} \\ 0 \\ -\sqrt{2}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$u_2 = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2}^{-1} \\ 0 \\ -\sqrt{2}^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{3}^{-1} \\ \sqrt{3}^{-1} \\ \sqrt{3}^{-1} \end{pmatrix} \right\} = U_2$$

$$\therefore \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2}^{-1} \\ 0 \\ -\sqrt{2}^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{3}^{-1} \\ \sqrt{3}^{-1} \\ \sqrt{3}^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{6}^{-1} \\ -2\sqrt{6}^{-1} \\ \sqrt{6}^{-1} \end{pmatrix} \right\}$$

es base ortonormal de vectores propios