MA1102-3: Álgebra Lineal
Profesor: Jaime San Martín
Auxiliar: Felipe Hernández Castro

Resumen - C3

22 de diciembre 2018

6.-Valores y vectores propios

- **[Vector y valor propio]**:
Diremos que $x \in V$ es vector propio de $L : V \to V$ si:

  1. $x \neq 0$
  2. $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tal que $L(x) = \lambda x$.

  Observación: De igual manera, diremos que $x \in V - \{0\}$ es vector propio de la matriz A, si es vector propio de la aplicación lineal $L(x) = Ax$, en donde:
$$Ax = \lambda x$$
.De la misma manera decimos que λ es valor propio de A.

- **[Proposición 1]**:
Dado $A \in \mathcal{M}_{nn}$, son equivalentes:

  1. $\exists x \neq 0$, $Ax = \lambda x$.
  2. $\exists x$ solución no trivial del sistema $(A - \lambda I)x = 0$
  3. $Ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$
  4. $(A - \lambda I)$ no es invertible.

- **[Polinomio Característico]**:
Llamaremos polinomio característico de una matriz A a $P(\lambda) = |A - \lambda I|$.

- **[Propiedades varias]**:

  1. Todo vector propio tiene asociado un único valor propio.
  2. Cada valor propio tiene un subespacio de vectores propios asociados, el cual llamaremos subespacio propio W_λ.
  3. Si A y B son similares entonces tienen el mismo polinomio característico, es decir $|A - \lambda I| = |B - \lambda I|$ y por ende los mismo valores propios asociados.
  4. La traza de una matriz es igual a la suma de sus valores propios: $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

  [Algunas propiedades del determinante]:

  1. $|I| = 1$ donde I es la identidad.
  2. Si A es triangular superior entonces $|A| = \Pi_{i=1}^{n} a_{ii}$
  3. A es invertible si y solo si $|A| \neq 0$
  4. $|AB| = |A||B|$
  5. $|A| = |A^t|$

- **[Similar a una diagonal]**:
Si una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ es similar a una matriz D ($A = PDP^{-1}$) se tendrán las siguientes propiedades:

  1. $r(A) = r(D) =$ Valores propios no nulos
  2. Si A es invertible $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$
  3. $A^m = PD^mP^{-1}$

- **[Matriz diagonalizable]**:
Diremos que $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ es diagonalizable si y sólo si admite una base de vectores propios de A.

- **[Vectores propios l.i.]**:
Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, si $\{\lambda_i\}_{i=1,\ldots,k}$ son valores propios distintos de A asociados a los vectores propios $\{v_i\}_{i=1,\ldots,k}$, entonces $\{v_i\}_{i=1,\ldots,k}$ es l.i. .

- **[Suma directa multiple]**:
Sea V e.v. y $\{U_i\}_{i=1,\ldots,k}$ una familia de s.e.v's de V. Diremos que $Z = +_{i=1}^{k} U_i$ es suma directa, notado $Z = \bigoplus_{i=1}^{k} U_i$ si para todo $v \in Z$, v se escribe de manera unica como:
$$v = \sum_{i=1}^{k} u_i, \qquad \text{con } u_i \in U_i, \qquad \forall i \in \{1, ..., k\}.$$
Observación: Para ver equivalencias, favor leer proposición 5.4 del apunte.

- **[Multiplicidad geométrica y algebraica]**:
Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ y λ un valor propio de A. Definimos:

1. La multiplicidad geométrica de λ, $\gamma_A(\lambda)$, como la dimension del espacio propio $W_\lambda = Ker(A - \lambda I)$.
2. La multiplicidad algebraica de λ, $\alpha_A(\lambda)$, como la máxima potencial de $(x-\lambda)$ que divide al polinomio característico de A.

- [**Desigualdad de multiplicidades**]:
Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ y λ un valor propio. Entonces:

$$1 \leq \gamma_A(\lambda) \leq \alpha_A(\lambda) \leq n$$

- [**Equivalencias Diagonalizable**]:
Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. A es diagonalizable.
2. A es similar a una matriz diagonal.
3. La suma de las multiplicidades geométricas es n.
4. Para cada valor propio λ se tiene $\alpha_A(\lambda) = \gamma_A(\lambda)$
5. Si $\{\lambda_i\}_{i=1,...,k}$ son los valores propios distintos de A, se tiene $\mathbb{K}^n = W_{\lambda_1} \oplus W_{\lambda_2} \oplus ... \oplus W_{\lambda_k}$

7.-Ortogonalidad

- [**Conjunto ortonormal**]:
Un conjunto $\{v_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R}^n$ se dice ortogonal si $\langle v_i, v_j \rangle =$ para todo $i \neq j$. Si además $||v_i|| = 1$ para todo i, entonces diremos que el conjunto es ortonormal.

- [**Propiedades**]:

(a) Un conjunto ortogonal es l.i.
(b) Todo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ posee una base ortonormal.

- [**Proyección**]:
Sea W un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$, con $\{v_i\}_{i=1}^k$ una base ortonormal de W y sea $x \in \mathbb{R}^n$. Llamaremos proyección ortogonal de x sobre W al vector:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x, u_i \rangle u_i \quad \in \; W$$

Se cumple que:

(a) $P(x) - x \perp w, \quad \forall w \in W$
(b) $x \in W \iff P(x) = x$
(c) $P(x)$ minimiza la distancia entre x y W : $d(x, P(x)) = mín_w d(x,w)$.
(d) P es una transforación lineal.

- [**Subespacio ortogonal**]:
Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$, se define el ortogonal de W como:

$$W^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n | \forall \; w \in W, \quad \langle w, u \rangle = 0\}$$

Este conjunto cumple las siguientes propiedades:

(a) $W^\perp$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.
(b) $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$.

- [**Producto hermítico**]:
Dados $u, v \in \mathbb{C}^n$, definimos el producto hermítico como:

$$\langle u, v \rangle_H = \sum_{i=1}^{n} u_i \bar{v}_i$$

- [**Adjunta**]:
Se define la adjunta de una matriz A como $A^* = \bar{A}^t$. Si $A^* = A$, decimos que A es hermítica.
Observación: Si $A \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$ es hermítica, entonces $A = A^t$

- [**Espectro**]:
Se define el espectro de una matriz A como:

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \; |A - \lambda I| = 0\}$$

- [**Vectores propios ortogonales**]:
Si A es simétrica (o hermitica) y v_1, v_2 son dos vectores propios asociados a dos valores propios distintos, entonces $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

- [**Diagonalización de simetricas**]:
Si A es simétrica, entonces existe una base ortonormal $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de vectores propios, luego existen P y D tales que $A = PDP^t$ donde $P^{-1} = P^t$

[Metodo de G-S]

Dado un conjunto $V = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ **l.i.**, el método de Gram-Schmidt entrega una base ortonormal $U = \{u_1, u_2, ..., u_k\}$ del subespacio generado por V ($\langle V \rangle$). El método se define como sigue:

1. **(Caso base)** Se parte extrayendo un elemento arbitrario de V normalizándolo: $u_1 = \frac{v_1}{||v_1||}$, de manera que en el primer paso obtenemos el conjunto $U_1 = \{u_1\}$

2. **(Iteración)** Dado $U_i = \{u_1, ..., u_i\}$, se obtiene u_{i+1} como sigue:

$$u_{i+1} = \frac{v_{i+1} - P_{U_i}(v_{i+1})}{||v_{i+1} - P_{U_i}(v_{i+1})||}$$

   Donde $P_{U_i}(v_{i+1})$ es la proyección ortogonal de v_{i+1} sobre U_i. Así se obtiene $U_{i+1} = \{u_1, ..., u_i, u_{i+1}\}$.

Así, el método parte con U_1, con el cual se genera U_2, y así iterativamente, hasta formar $U_k = U$ (pues V tiene k elementos).