MA1102-3: Álgebra Lineal
Profesor: Jaime San Martín
Auxiliar: Felipe Hernández Castro

Auxiliar 13 - Ortogonalidad

17 de diciembre de 2018

Resumen

- **[Conjunto ortonormal]**: Un conjunto $\{v_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R}^n$ se dice ortogonal si $\langle v_i, v_j\rangle =$ para todo $i \neq j$. Si además $||v_i|| = 1$ para todo i, entonces diremos que el conjunto es ortonormal.
- **[Propiedades]**:
  (a) Un conjunto ortogonal es l.i.
  (b) Todo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ posee una base ortonormal.
- **[Proyección]**: Sea W un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$, con $\{v_i\}_{i=1}^k$ una base ortonormal de W y sea $x \in \mathbb{R}^n$. Llamaremos proyección ortogonal de x sobre W al vector:
$$P(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x, u_i\rangle u_i \quad \in \quad W$$
  Se cumple que:
  (a) $P(x) - x \perp w, \quad \forall w \in W$
  (b) $x \in W \iff P(x) = x$
  (c) $P(x)$ minimiza la distancia entre x y W : $d(x, P(x)) = mín_w d(x, w)$.
  (d) P es una transforación lineal.
- **[Subespacio ortogonal]**: Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$, se define el ortogonal de W como:
$$W^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n | \forall\ w \in W, \quad \langle w, u\rangle = 0\}$$
  Este conjunto cumple las siguientes propiedades:
  (a) $W^\perp$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.
  (b) $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$.
- **[Producto hermítico]**: Dados $u, v \in \mathbb{C}^n$, definimos el producto hermítico como:
$$\langle u, v\rangle_H = \sum_{i=1}^{n} u_i \bar{v_i}$$
- **[Adjunta]**: Se define la adjunta de una matriz A como $A^* = \bar{A}^t$. Si $A^* = A$, decimos que A es hermítica.
  Observación: Si $A \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$ es hermítica, entonces $A = A^t$
- **[Espectro]**: Se define el espectro de una matriz A como:
$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} |\ |A - \lambda I| = 0\}$$
- **[Vectores propios ortogonales]**: Si A es simétrica (o hermitica) y v_1, v_2 son dos vectores propios asociados a dos valores propios distintos, entonces $\langle v_1, v_2\rangle = 0$
- **[Diagonalización de simetricas]**: Si A es simetrica, entonces existe una base ortonormal $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de vectores propios, luego existen P y D tales que $A = PDP^t$ donde $P^{-1} = P^t$

P1. Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ simetrica. Demuestre que las siguientes proposiciones son equivalentes:

I) Los únicos valores propios de A son $\lambda_1 = 1$, con $\alpha_A(1) = 1$ y $\lambda_2 = 0$ con $\alpha_A(0) = n - 1$.
II) $A = uu^t$ para algún $u \in \mathbb{R}^n$, con $||u|| = 1$.

P2. Sea $A \in \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$. Se sabe que A es simétrica y que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es vector propio de A asociado al valor propio 2, y además $dim(Ker(A)) = 2$. Calcular A.

P3. Sea $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 | x - y - z + w = 0 \right\}$.

a) Encuentre una base ortonormal de U.

b) Encuentre una base ortonormal de $U^\perp$

P4. Considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Se sabe que $\lambda = 3$ es un valor propio de A.

a) De una base del espacio de vectores propios asociados a $\lambda = 3$.

b) Encuentre el resto de valores propios y deduzca una base de sus respectivos espacios.

c) Justifique la existencia de una base ortonormal de vectores propios y encuéntrela.

[**Metodo de G-S**]

Dado un conjunto $V = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ **l.i.**, el método de Gram-Schmidt entrega una base ortonormal $U = \{u_1, u_2, ..., u_k\}$ del subespacio generado por V ($\langle V \rangle$). El método se define como sigue:

1. **(Caso base)** Se parte extrayendo un elemento arbitrario de V normalizándolo: $u_1 = \frac{v_1}{||v_1||}$, de manera que en el primer paso obtenemos el conjunto $U_1 = \{u_1\}$

2. **(Iteración)** Dado $U_i = \{u_1, ..., u_i\}$, se obtiene u_{i+1} como sigue:

$$u_{i+1} = \frac{v_{i+1} - P_{U_i}(v_{i+1})}{||v_{i+1} - P_{U_i}(v_{i+1})||}$$

Donde $P_{U_i}(v_{i+1})$ es la proyección ortogonal de v_{i+1} sobre U_i. Así se obtiene $U_{i+1} = \{u_1, ..., u_i, u_{i+1}\}$.

Así, el método parte con U_1, con el cual se genera U_2, y así iterativamente, hasta formar $U_k = U$ (pues V tiene k elementos).