

P1 $P^2 = P$

P.D.Q. P es diagonalizable

En efecto: En auxiliares anteriores vimos que:

Γ $P^2 = P \Rightarrow 0 \text{ y } 1$ son sus únicos valores propios.
(posibles)

$\square$

La idea es usar esto de manera astuta! Para esto, veremos que $\mathbb{R}^n = W_0 \oplus W_1$, o equivalentemente $\dim W_0 + \dim W_1 = n$, esto pues no tenemos mucha información de P , solo conocemos sus valores propios. Para esto vemos que formar tienen W_0 y W_1 :

$W_0 = \text{Ker}(P - 0 \cdot I) = \text{Ker } P \rightarrow \text{El Kernel de } P!$

$W_1 = \text{Ker}(P - I)$

Oh, no gustaría probar que:

$\underbrace{\dim \mathbb{R}^n}_n = \underbrace{\dim \text{Ker } P}_{\dim W_0} + \underbrace{\dim \text{Ker } P - I}_{\dim W_1}$

¿A que se parece esta ecuación? ¡Al teorema núcleo-Imagen!

Nosotros sabemos que:

$\dim \mathbb{R}^n = \dim \text{Ker } P + \dim \text{Im } P$

$\therefore$ Si demostramos que $\dim \text{Im } P = \dim \text{Ker } P - I$ estamos listos!!

Y de hecho, se tiene que $\text{Im } P = \text{Ker}(P-I)$, en efecto:

$$\underline{1)} \quad v \in \text{Ker } P-I \quad \xrightarrow{\text{Def. del Ker}(P-I)} \quad (P-I)v = 0$$

$$\Leftrightarrow Pv - v = 0$$

$$\Leftrightarrow Pv = v$$

Def. de la
Im P

$$\xleftarrow{\quad} \Rightarrow v \in \text{Im } P$$

$$\therefore \text{Ker } P-I \subseteq \text{Im } P$$

$$\underline{2)} \quad v \in \text{Im } P \Rightarrow \exists u, \quad Pu = v \quad /P.$$

$$P^2 = P \quad \Rightarrow \quad P^2 u = Pv$$

$$\xleftarrow{\quad} \Rightarrow Pv = Pu$$

$$Pu = v \quad \xleftarrow{\quad} \Rightarrow Pv = v$$

$$\Rightarrow (P-I)v = 0$$

$$\Rightarrow v \in \text{Ker } P-I$$

$$\therefore \text{Im } P \subseteq \text{Ker } P-I$$

finalmente $\text{Im } P = \text{Ker } P-I$

con lo cual - Por T.N.I. - se tendría que:

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim \text{Ker } P + \dim \text{Ker } P-I$$

$$\Leftrightarrow n = p(0) + p(1)$$

$$\Leftrightarrow P \text{ es diagonalizable } \text{!!}$$

Pauta Auxilio 12

P2 $M \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$

$$\bullet \text{Ker}(M - I) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle (= W_1)$$

$$\bullet \text{Ker}(M - 2I) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle (= W_2)$$

P.D.Q. M es diagonalizable.

En efecto: Tenemos que 1 y 2 son los valores propios de M , esto es directo del hecho que $\text{Ker}(M - 1 \cdot I) \neq \emptyset$ y $\text{Ker}(M - 2 \cdot I) \neq \emptyset$ (pues tenemos que existen u, v vectores tal que $(M - I)u = 0 \wedge (M - 2I)v = 0$
 $\Leftrightarrow Mu = u \wedge Mv = 2v$).

A demos:

$$\bullet p(1) = \dim W_1 = \dim \text{Ker}(M - I) = 2$$

pues $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son claramente l.i.

$$\bullet p(2) = \dim W_2 = \dim \text{Ker}(M - 2I) = 1$$

pues $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ es l.i. (es un singleton)

Luego $p(1) + p(2) = 3$ y como $M \in M_{3 \times 3}$, esto implica que M es diagonalizable.

Observación : También se podría argumentar con que

$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de vectores

propios de $\mathbb{R}^3$, esto pues son 3 vectores y son l.i.!

pues $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es claro l.i., y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ es l.i.

con estos dos últimos pues es vector propio de un valor propio distinto.

Ahora encontremos M ! para ello diagonalicemos:

- Sabemos que 1 es valor propio con $W_1 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$
- Sabemos que 2 es valor propio con $W_2 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

Así, podemos diagonalizar M como sigue

$$M = P D P^{-1} \quad \text{con:}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ para encontrar M , es necesario hallar P^{-1} .

Para esto usaremos método de Gauss:

Resolvamos el sistema matricial $PX = I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Eseleccionando:

$$\underline{f_3' = f_3 - f_1} \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\underline{f_3'' = f_3' + \frac{3}{2}f_2} \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1 & 3/2 & 1 \end{array} \right]$$

$$\underline{f_3''' = -2f_3''} \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & -2 \end{array} \right]$$

$$f_2' = f_2 - f_3'''$$

$$\underline{f_1' = f_1 - f_3'''} \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & -2 \end{array} \right]$$

$$\underline{f_1'' = f_1' - f_2'}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & -2 \end{array} \right]$$

$$\underline{f_2'' = \frac{1}{2} f_2'} \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & -2 \end{array} \right]$$

$$\therefore P^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{array} \right]$$

Observación: Siempre es recomendable verificar en una hoja aparte que efectivamente $P \cdot P^{-1} = I$.

Entonces:

$$M = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc} 3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{array} \right]$$

Punto Auxiliar 12

P3

$$i) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• ¿Es diagonalizable?

Notar que 1 es el único valor propio de A , con $d(1) = 3$, en efecto:

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

Segundo el determi-
nante por la primera
fila

$$= (1-\lambda) \cdot [(1-\lambda) \cdot (1-\lambda)]$$

$$= (1-\lambda)^3$$

$\therefore$ 1 es valor propio (pues $p(1) = 0$) con $d(1) = 3$
(multiplicidad algebraica).

Si A fuera diagonalizable, $d(1) = f(1) = 3$

¿O sea que $f(1) = 3$?

Para eso, tendría que pasar que $\dim \text{Ker}(A - I) = 3$.

Una opción, es meterse a buscar una base de $\text{Ker}(A - I)$.

Otro - y mucho más corto - es usar T.N.I.!, por
T.N.I.:

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Ker } A - I + \dim \text{Im}(A - I)$$

$$\Leftrightarrow 3 = \dim \text{Ker}(A-I) + \underline{r(A-I)}$$

Ranko de $A-I$

$$\text{Luego } \dim \text{Ker}(A-I) = 0 \Leftrightarrow r(A-I) = 0$$

pero:

$$A-I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{luego } r(A-I) = 2$$

pero tiene dos filas l.i. (la primera y segunda).

De hecho la única matriz M que cumple $r(M) = 0$ es $M = 0$ (matriz con puros 0's).

$$\therefore r(A-I) \neq 0 \Rightarrow \dim \text{Ker}(A-I) \neq 3$$

$$\Rightarrow \lambda(1) \neq 3$$

$\Rightarrow A$ no es diagonalizable

$$ii) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

¿Es diagonalizable?

Es fácil ver que $\{1, 2, 3\}$ son valores propios, esto pues el polinomio característico de B es:

$$P(\lambda) = |B - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{dependiendo la primera columna.}} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$$

$\therefore \{1, 2, 3\}$ son valores propios.

Tenemos 3 valores propios distintos! $\therefore B$ es diagonalizable
pues:

$$\left. \begin{aligned} 1 &\leq h(1) \leq d(1) = 1 \\ 1 &\leq h(2) \leq d(2) = 1 \\ 1 &\leq h(3) \leq d(3) = 1 \end{aligned} \right\}$$

Desigualdad del resumen

$$\Rightarrow h(1) = d(1) = 1$$

$$h(2) = d(2) = 1$$

$$h(3) = d(3) = 1$$

$\therefore \forall \lambda$ valor propio $h(\lambda) = d(\lambda)$

$\Rightarrow B$ es diagonalizable

(iii)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el polinomio característico:

$$P(\lambda) = |C - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda^+ & 0 & 1 & 0 \\ 1^- & 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0^+ & 0^- & 1-\lambda^+ & 0^- \\ 1 & 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

Usando la 3^{ra} fila.

$$= (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

Usando 1^{er} file

$$= (1-\lambda)(1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(1-\lambda) \cdot [(2-\lambda)(1-\lambda) - 2]$$

$$= (1-\lambda)^2 \cdot [\lambda^2 - 3\lambda]$$

$$= \lambda(1-\lambda)^2 \cdot (\lambda-3)$$

$$\therefore p(\lambda) = \lambda(1-\lambda)^2(\lambda-3)$$

$\Rightarrow \{0, 1, 3\}$ son valores propios con

$$d(0) = 1$$

$$d(1) = 2$$

$$d(3) = 1$$

} multiplicidades algebraicas.

es fácil ver que $f(0) = d(0)$ y $f(3) = d(3)$, en efecto:

$$1 \leq f(0) \leq d(0) = 1$$

$\Rightarrow$

$$f(0) = 1$$

$$1 \leq f(3) \leq d(3) = 1$$

$$f(3) = 1$$

$\therefore$ Si C es diagonalizable depende en el valor propio 1, es decir

$$C \text{ es diagonalizable} \Leftrightarrow f(1) = d(1) = 2$$

¿Cúme fue $f(1) = 2$? superemos el mismo truco que para la matriz A , superemos T.N.I.:

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Ker}(C - 1 \cdot I) + \dim \text{Im}(C - 1 \cdot I)$$

$$\Leftrightarrow 3 = \dim \text{Ker}(C - 1 \cdot I) + r(C - I)$$

$$\therefore (f(1) =) \dim \text{Ker}(C - I) = 2 \Leftrightarrow r(C - I) = 1$$

Pero:

$$C - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Basta ver que la primera y segunda fila son l. i.
pero ver que $r(C - I) > 1 \Rightarrow r(C - I) \neq 1$

$\Rightarrow f(1) \neq 2 \Rightarrow C$ no es diagonalizable //

Punto Auxiliar 12

P4

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calculamos el polinomio característico:

$$P(\lambda) = |B - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

Dentro del determinante siempre podemos restar o sumamos filas! (también columnas). La permutación también está permitida, pero cambia el signo del determinante.

Ors:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda^+ & 1 & 1 & 1 \\ 1^- & 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0^+ & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0^- & \lambda-1^+ & 0^- & 1-\lambda^+ \end{vmatrix}$$

$$f_3' = f_3 - f_2$$

$$f_4' = f_4 - f_2$$

Ahora, usaremos la cuarta fila para calcular el determinante, pues solo hay dos coeficientes no nulos y son idénticos! :

$$P(\lambda) = (\lambda-1) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \end{vmatrix} + (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\Rightarrow p(\lambda) = (\lambda - 1) \cdot \left(\underbrace{\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \end{vmatrix}}_{(1)} - \underbrace{\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \end{vmatrix}}_{(2)} \right)$$

Columnas (1) y (2):

$$(1) = \begin{vmatrix} 2-\lambda^+ & 1 & 1 \\ 1^- & 1 & 1 \\ 0^+ & 1-\lambda^- & 0^+ \end{vmatrix} = -(1-\lambda) \cdot [(2-\lambda) \cdot 1 - 1 \cdot 1]$$

Usando la 3^{ra} fila $\swarrow$

$$= -(1-\lambda) \cdot (1-\lambda)$$

$$= -(1-\lambda)^2$$

$$(2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

Nosotros sabemos que podemos sumar filas ponderadas, pero columnas también! pues $|A| = |A^t|$, así:

Columna 3' $\leftarrow$
 = Columna 3
 + Columna 2

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda^+ & 1 & 2 \\ 1^- & 2-\lambda^+ & 3-\lambda \\ 0^+ & \lambda-1^- & 0^+ \end{vmatrix}$$

Usando la tercera fila:

$$= -(\lambda-1) \cdot [(2-\lambda)(3-\lambda) - 2]$$

$$= -(\lambda-1) (\lambda^2 - 5\lambda + 4) = -(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-4)$$

$$= -(\lambda - 1)^2 (\lambda - 4)$$

Luego

$$p(\lambda) = (\lambda - 1) \cdot \left(-(\lambda - 1)^2 + (\lambda - 1)^2 (\lambda - 4) \right)$$

$$= (\lambda - 1)^3 (-1 + \lambda - 4)$$

$$= (\lambda - 1)^3 (\lambda - 5)$$

$\therefore p(\lambda) = (\lambda - 1)^3 (\lambda - 5)$ es el pol. característico!

con $\{1, 5\}$ valores propios con $\alpha(1) = 3$, $\alpha(5) = 1$.

b) $\lambda = 1$ Para encontrar W_1 , resolvemos el sistema $(B - I)v = 0$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$f_2' = f_2 - f_1$$

$$f_3' = f_3 - f_1$$

$$f_4' = f_4 - f_1 \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Luego: $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0 \Rightarrow v_4 = -v_1 - v_2 - v_3$

$$\text{Otra: } v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ -v_1 - v_2 - v_3 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$O_{H^{-}}, W_1 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

$\lambda = 5$ Para encontrar W_5 , debemos resolver el sistema $(B - 5I)v = 0$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right]$$

Uff! un poco largo no? , se puede resolver pero tarda tiempo... para ahorrar tiempo, podemos usar un método alternativo!:

$$\text{Sabemos que } 1 \leq p(s) \leq d(s) = 1$$

$\Rightarrow p(s) = 1$ luego este sistema tendrá como solución uno solo (por $\dim W_5 = 1$).

Si encontramos un vector $v \neq 0$ que solucione el sistema, podremos afirmar que $\{v\}$ es base de W_5 (es l.i. y $\dim W_5 = 1$). Encontramos por adivinación v :

- Nota que todas las filas son iguales solo permutaciones en los coeficientes, en tres palabras, todas las filas tienen tres 1's y un -3. $\therefore$ es razonable pensar que las coordenadas de v sean todas iguales! $\therefore$ probemos con el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

✓ Se verifica! pues $-3 + 1 + 1 + 1 = 0$!!!

$$\therefore W_5 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

c) B es diagonalizable pues $\chi(s) + \chi(1) = 4$ ✓

Donde:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{Con } B = P D P^{-1}$$