MA1102-3: Álgebra Lineal
Profesor: Jaime San Martín
Auxiliar: Felipe Hernández Castro

Auxiliar 12 - Diagonalización

10 de diciembre de 2018

Resumen

- **[Similar a una diagonal]**: Si una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ es similar a una matriz D ($A = PDP^{-1}$) se tendrán las siguientes propiedades:
  1. $r(A) = r(D) =$ Valores propios no nulos
  2. Si A es invertible $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$
  3. $A^m = PD^mP^{-1}$
- **[Matriz diagonalizable]**: Diremos que $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ es diagonalizable si y sólo si admite una base de vectores propios de A.
- **[Vectores propios l.i.]**: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, si $\{\lambda_i\}_{i=1,...,k}$ son valores propios distintos de A asociados a los vectores propios $\{v_i\}_{i=1,...,k}$, entonces $\{v_i\}_{i=1,...,k}$ es l.i. .
- **[Suma directa multiple]**: Sea V e.v. y $\{U_i\}_{i=1,...,k}$ una familia de s.e.v's de V. Diremos que $Z = +_{i=1}^{k} U_i$ es suma directa, notado $Z = \bigoplus_{i=1}^{k} U_i$ si para todo $v \in Z$, v se escribe de manera unica como:

$$v = \sum_{i=1}^{k} u_i, \qquad \text{con } u_i \in U_i, \qquad \forall i \in \{1, ..., k\}.$$

Observación: Para ver equivalencias, favor leer proposición 5.4 del apunte.

- **[Multiplicidad geométrica y algebraica]**: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ y λ un valor propio de A. Definimos:
  1. La multiplicidad geométrica de λ, $\gamma_A(\lambda)$, como la dimension del espacio propio $W_\lambda = Ker(A - \lambda I)$.
  2. La multiplicidad algebraica de λ, $\alpha_A(\lambda)$, como la máxima potencial de $(x - \lambda)$ que divide al polinomio característico de A.
- **[Desigualdad de multiplicidades]**: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ y λ un valor propio. Entonces:

$$1 \leq \gamma_A(\lambda) \leq \alpha_A(\lambda) \leq n$$

- **[Equivalencias Diagonalizable]**: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, las siguientes proposiciones son equivalentes:
  1. A es diagonalizable.
  2. A es similar a una matriz diagonal.
  3. La suma de las multiplicidades geométricas es n.
  4. Para cada valor propio λ se tiene $\alpha_A(\lambda) = \gamma_A(\lambda)$
  5. Si $\{\lambda_i\}_{i=1,...,k}$ son los valores propios distintos de A, se tiene $\mathbb{K}^n = W_{\lambda_1} \oplus W_{\lambda_2} \oplus ... \oplus W_{\lambda_k}$

P1. Sea $P \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, demuestre que si $P = P^2$ entonces P es diagonalizable.

P2. Sea $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $Ker(M - I) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$ y $Ker(M - 2I) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$.

Demuestre que M es diagonalizable y encuentre explícitamente M.

P3. Decida si las siguientes matrices son diagonalizables:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

P4. Considere la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcule el polinomio característico y valores propios con sus multiplicidades algebraicas respectivas.

b) Determine los subespacios propios asociados a cada valor propio y calcule las multiplicidades geométricas de cada valor propio.

c) Estudie la diagonalizabilidad de B y calcule las matrices P y D si es que B es diagonalizable.