Pauta Auxiliar 11

P1

a) Si $A^2 = A$

P.D.Q. Los unicos valores propios asociados a A son 0 y 1

En efecto: Sea λ val. propio de A. Así, existe $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ t.q.

$$Av = \lambda v \qquad (1)$$

La idea es usar esto en $A^2 = A$, para eso "multiplicamos" por la derecha esta ultima ecuación por v:

$$A^2 v = Av \qquad (2)$$

- Por un lado: $Av = \lambda v$ directo de (1).
- Por otro lado: $A^2 v = A(Av) \underset{\text{usando (1)}}{=} A(\lambda v) \underset{\lambda \text{ es escalar}}{=} \lambda (Av) \underset{\text{usando (1)}}{=} \lambda^2 v$

Así en (2) tenemos:

$$\lambda^2 v = \lambda v \implies (\lambda^2 - \lambda) v = 0$$

Como $v \neq 0$ la unica opción es que $\lambda^2 - \lambda = 0$

$\iff \lambda = 1 \lor \lambda = 0$ los cuales son los unicos valores propios por construcción

b) B nilpotente ($\exists k \in \mathbb{N}-\{0\}$, $B^k = 0$)

P.D.Q. Sus valores propios son nulos.

En efecto: Sea λ val. propio de B, luego $\exists v \neq 0$ t.q.:

$$Bv = \lambda v \qquad (3)$$

La idea es usar que $B^k = 0$. Para eso notar que:

· $n=1$

$$Bv = \lambda v$$

· $n=2$

$$B^2 v = B(\underbrace{Bv}_{\text{caso } n=1}) = \lambda Bv = \lambda^2 v \quad \therefore \quad B^2 v = \lambda^2 v$$

· $n=3$

$$B^3 v = B(\underbrace{B^2 v}_{\text{caso } n=2}) = \lambda^2 (Bv) = \lambda^3 v$$

Por ende, veamos que $B^n v = \lambda^n v$:

- Caso base: $n=1$ $Bv = \lambda v$ ✓
- hipotesis: $B^n v = \lambda^n v$
- P.D.Q.: $B^{n+1} v = \lambda^{n+1} v$

En efecto: $B^{n+1} v = B(\underbrace{B^n v}_{\text{hipotesis}}) = B(\lambda^n v) = \lambda^n \underbrace{Bv}_{\text{caso } n=1} = \lambda^{n+1} v$ //

$\therefore B^n v = \lambda^n v$. Tomando $n = k$:

$B^k v = \lambda^k v$ pero $B^k = 0 \implies \lambda^k v = 0$

y como $v \neq 0$, se tendrá $\lambda^k = 0 \implies \lambda = 0$ //

$\therefore$ los val. propios son nulos!!

c) Sea B invertible y λ valor propio.

P.D.Q. $\frac{1}{\lambda}$ es valor propio de B^{-1}.

En efecto: Como λ es val. propio de B, $\exists v \neq 0$ tal que:

$$Bv = \lambda v \quad (3)$$

La idea es hacer aparecer B^{-1}, luego multiplicamos por B^{-1}:

$$B^{-1} \cdot (3) \iff B^{-1} B v = B^{-1} \lambda v$$

$$\iff v = \lambda B^{-1} v \quad / \cdot \frac{1}{\lambda}$$

$$\iff \frac{1}{\lambda} v = B^{-1} v$$

$$\iff \frac{1}{\lambda} \text{ es val. propio de } B^{-1}.$$

d) P.D.Q. A no invertible $\iff \lambda = 0$ es valor propio de A

En efecto: Recordemos que $p(\lambda) = |A - \lambda I|$ es el polinomio característico de A, cuyos valores propios son raíces de p $(|A - \lambda I| = 0)$

Tenemos que:

Propiedad del resumen

$$A \text{ no invertible} \iff |A| = 0 \iff |A - 0 \cdot I| = 0$$

Def de P.

$$\iff p(0) = 0$$

Por ser raíz de $p(\lambda)$

$$\iff \lambda = 0 \text{ es valor propio de } A$$

e) A es invertible

P.D.Q. El polinomio característico de AB es el mismo que el de BA.

En efecto: Hay que ver que $|AB - \lambda \cdot I| = |B \cdot A - \lambda I|$

Nos gustaría cambiar de lado la matriz A, para eso usaremos que $|M \cdot N| = |M|\,|N|$ (★):

$$|AB - \lambda I| \underset{I = A \cdot A^{-1}}{=} |A(B - \lambda A^{-1})| = \underbrace{|A|\,|B - \lambda A^{-1}|}$$

"Sacamos" A afuera, y el producto de determinantes conmuta (es el producto en $\mathbb{R}$, de números)

usamos (★)

$$\therefore \quad = |B - \lambda A^{-1}|\,|A| = |(B - \lambda A^{-1}) \cdot A|$$

$$= |BA - \lambda A^{-1} A|$$

$$= |BA - \lambda I|$$

Probando lo pedido.

Punto Auxiliar 11

P2)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

El procedimiento es el siguiente:

#1 Encontrar $p(\lambda)$ (pol. característico)

$P(\lambda) = |A - \lambda I|$ ∴ hay que calcular un determinante:

$$|A - \lambda I| = \underbrace{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}}$$

¿Como calcularlo?

Para aquello, primero elegir una fila/columna.
En este caso elegiremos la segunda. Luego desde la casilla superior izquierda, iniciar un "camino" intercambiando signos + y - como sigue:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda^{\,+} & 2 & 3 \\ \boxed{2^{\,-} \quad 1-\lambda^{\,+} \quad 0^{\,-}} \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \longrightarrow \text{fila elegida}$$

Ahora, mediante la fila/columna escogida, la recorremos tomando cada coordenada - con el signo escogido - multiplicandola por el determinante de la sub-matriz obtenida tapando la fila y columna asociadas al coeficiente, para así sumar estas ponderaciones:

- Para 2 :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ \boxed{2} & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \longrightarrow$$

Submatriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

- Para $(1-\lambda)$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & \boxed{1-\lambda} & 0 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \longrightarrow$$

Submatriz

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

- Para 0 :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \longrightarrow$$

Submatriz

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Así:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda^{+} & 2 & 3 \\ 2^{-} & 1-\lambda^{+} & 0^{-} \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(-2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} - \underbrace{0\cdot\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}_{=0}$$

→ Aquí se ve porque elegimos la segunda fila, esto fue porque tenía un 0 ! !

Además tenemos la formula para el determinante de una matriz de 2×2 :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\cdot d - b\cdot c$$

Luego:

$$|A - \lambda I| = (-2)\cdot\left(\lambda\cdot(3-\lambda) - 3\right) + (1-\lambda)\left((1-\lambda)(3-\lambda) + 3\right)$$

$$= (-2)(3 - 2\lambda) + (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 6)$$

$$= 4\lambda - 6 + \lambda^2 - 4\lambda + 6 - \lambda^3 + 4\lambda^2 - 6\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 6\lambda$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$$

$$= -\lambda(\lambda - 3)(\lambda - 2)$$

$\therefore$ el polinomio será $p(\lambda) = -\lambda(\lambda-3)(\lambda-2)$

#2 encontrar las raíces de $p(\lambda)$ (valores propios)

En este caso ya factorizamos, por ende imponemos que:

$$p(\lambda) = 0 \iff \lambda(\lambda-3)(\lambda-2) = 0$$

$$\iff \lambda = 0 \lor \lambda = 2 \lor \lambda = 3$$

$\therefore$ $\{0, 2, 3\}$ son los valores propios de A.

#3 encontrar vectores propios (sub-espacios asociados)

- Para esto, debemos que hallar las soluciones del sistema:

$(A - \lambda I)v = 0$ con v incognita y λ conocido:

$\underline{\lambda = 0}$ Hallemos las soluciones del sistema homogeneo:

$Av = 0$ Así, escalonamos A:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[f_3' = f_3 + f_1]{f_2' = f_2 - 2f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{f_3'' = f_3' + f_2'} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}$$

El sistema SIEMPRE debe dar ∞ soluciones (si es que $\lambda = 0$ es valor propio realmente)

Así:
$$\begin{cases} v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0 \\ \quad -3v_2 - 6v_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0 & (1) \\ \quad -v_2 - 2v_3 = 0 & (2) \end{cases}$$

Dejando v_3 libre:

- de (2) $v_2 = -2v_3$
- Reemplazando en (1): $v_1 + 2\cdot(-2v_3) + 3v_3 = 0$

$$\Leftrightarrow v_1 = v_3$$

$$\therefore \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_3 \\ -2v_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ trivialmente l. i.!

$$\therefore \underbrace{W_0}_{\text{subespacio asociado al val propio } \lambda=0} = \langle \overbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}^{\text{Base}} \rangle$$

$B_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base

$\lambda = 2$ Solucionamos $(A - 2I)v = 0$

Escalonamos $(A - 2I) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[f_3' = f_3 - f_1]{f_2' = f_2 + 2f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{f_3'' = f_3' + \frac{1}{3} f_2'} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Luego: $\begin{cases} -v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0 & (1) \\ 3v_2 + 6v_3 = 0 & (2) \end{cases}$

dejando v_3 libre: $v_2 = -2v_3$ (en (2))

Reemplazando en (1): $-v_1 - 4v_3 + 3v_3 = 0$

$\iff v_1 = -v_3$

Así: $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_3 \\ -2v_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ } Trivialmente l.i.

$\therefore W_2 = \langle \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}_{\text{Base } \checkmark} \rangle$ $\quad B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base

$\boxed{\lambda = 3}$ Hay que resolver $(A - 3I)v = 0$

Con $A - 3I = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{f_3' = f_3 + \frac{1}{2} f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Así: $\begin{cases} -2v_1 + 2v_2 + v_3 = 0 & (1) \\ 2v_1 - 2v_2 = 0 & (2) \end{cases}$

Despejando v_1 en (2): $v_1 = v_2$

reemplazando en (1): $-2v_1 + 2v_2 + v_3 = 0$

$\Leftrightarrow v_3 = 0$

$\therefore \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ genera W_3 y evidentemente es l.i.

$\therefore B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es base y $W_3 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

Pauta Auxiliar 11

P3

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ x & y \end{pmatrix}$

- $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ vectores propios

- Encontrar x e y:

Imponemos la definición de vector propio:

Para v_1 $\exists \lambda_1 \in \mathbb{R}$, tal que:

$$A v_1 = \lambda_1 v_1 \iff \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 12 \\ 3x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$$

- Por fila 1: $\lambda_1 = 4$
- Por fila 2: $3x + y = 4$ (1)

Para v_2 $\exists \lambda_2 \in \mathbb{R}$, tal que:

$$A v_2 = \lambda v_2 \iff \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 10 \\ 2x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$$

- Por fila 1: $\lambda_1 = 5$
- Por fila 2: $2x + y = 5$ (2)

Scanned by CamScanner

Así, tenemos las ecuaciones (1) y (2):

$$\begin{cases} 3x + y = 4 & (1) \\ 2x + y = 5 & (2) \end{cases}$$

$(1) - (2) \iff x = 4 - 5 = -1$

Luego reemplazando en (2) por ejemplo: $y = 7$

$$\therefore \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Extensiones:

#1 [Diagonalizar A]

A se diagonaliza de la siguiente manera:

$$A = [v_1 \quad v_2] \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} [v_1 \quad v_2]^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

donde por formula conocida:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(3-2)} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

#2 [Otro problema interesante]

La extensión original al problema era la siguiente:

Encuentre una matriz $B \in M_{22}(\mathbb{R})$ con los mismos vectores propios v_1 y v_2 del punto a) y valores propios $\lambda_1 = 1$ asociado a v_1 y $\lambda_2 = 0$ asociado a v_2. Calcule, además, B^{10}.

Para este problema se diagonaliza directamente:

$$B = [v_1 \quad v_2] \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} [v_1 \quad v_2]^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

En general:

$$B^n = \left[\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right]^n = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = B$$

$$\therefore \quad B^{10} = B$$

Pauta Auxiliar 11

P4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El procedimiento es similar al de la P2

#1 Encontrar $p(\lambda)$ (pol. característico

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda^{+} & 1^{-} & -1^{+} \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

Usando la primera fila por ejemplo

$$= (1-\lambda)\cdot\left[(3-\lambda)(1-\lambda) - 1\cdot(-1)\right]$$
$$- 1 \cdot \left[(-1)(1-\lambda) - (-1)^2\right]$$
$$+ (-1)\left[(-1)\cdot 1 - (-1)(3-\lambda)\right]$$

$$= (1-\lambda)\cdot\left[3 - 4\lambda + \lambda^2 + 1\right] - 1\left[-1+\lambda-1\right]$$
$$-1\left[-1+3-\lambda\right]$$

$$= (1-\lambda)\left[\lambda^2 - 4\lambda + 4\right] + 2 - \lambda - 2 + \lambda$$
$$= (1-\lambda)\left[\lambda^2 - 4\lambda + 4\right] = (1-\lambda)(\lambda-2)^2$$

#2 encontrar las raíces de $p(\lambda)$ (valores propios)

En este caso $p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-2)^2$ ya está factorizado.

$\therefore$ imponemos: $p(\lambda) = 0 \iff (1-\lambda)(\lambda-2)^2 = 0$

$\iff \lambda = 1 \lor \lambda = 2$

$\therefore\ \lambda = 1$ y $\lambda = 2$ son los valores propios de A.

#3 Encontrar vectores propios (Sub-espacios propios asociados)

Para $\lambda = 1$ | Debemos hallar las soluciones del sistema:

$$(A - I)\,v = 0 \iff \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} v = 0$$

$$\iff \begin{cases} \quad v_2 - v_3 = 0 \\ -v_1 + 2v_2 - v_3 = 0 \\ -v_1 + v_2 = 0 \end{cases}$$

· de fila 1 : $v_2 = v_3$

· de fila 3 : $v_1 = v_2$

$$\underbrace{v_1 = v_2 = v_3}$$

vemos que con esto se tiene trivialmente la fila 2.

$$\therefore\ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ genera W_1, pero además es claramente l.i.

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base de W_1

Para $\lambda = 2$ Debemos hallar las soluciones del sistema:

$$(A - 2I)v = 0 \iff \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} v = 0$$

vemos que fila 1 = fila 2 = fila 3 $\therefore$ eliminaremos solo una:

$$-v_1 + v_2 - v_3 = 0 \iff v_1 = v_2 - v_3$$

Así:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 - v_3 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ genera, además es claramente l.i.

Luego, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base de W_2

#4 Imponer $A = [v_1\ v_2\ \dots\ v_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} [v_1\ v_2\ \dots\ v_n]^{-1}$

y hallar $[v_1\ v_2\ \dots\ v_n]^{-1}$.

Imponemos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Hallemos $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ con el método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[f_3' = f_3 - f_1]{f_2' = f_2 - f_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

I_{23} (permuta filas 2 y 3)

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{f_2' = f_2 - 2f_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{f_1' = f_1 + f_2 + f_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

fila 2 por (-1) $\longrightarrow$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Verificación: Siempre es recomendable que verifiquen si lo hicieron bien:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

✓ Verifico ser inversa.

$\therefore$ A se diagonaliza como:

$$\boxed{A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{D}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{P^{-1}}}$$