MA1102-3: Álgebra Lineal
Profesor: Jaime San Martín
Auxiliar: Felipe Hernández Castro

Auxiliar 11 - Vectores y valores propios

26 de noviembre de 2018

Resumen

- **[Vector y valor propio]**: Diremos que $x \in V$ es vector propio de $L : V \to V$ si:
  1. $x \neq 0$
  2. $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tal que $L(x) = \lambda x$.

  Observación: De igual manera, diremos que $x \in V - \{0\}$ es vector propio de la matriz A, si es vector propio de la aplicación lineal $L(x) = Ax$, en donde:

  $$Ax = \lambda x$$

  De la misma manera decimos que λ es valor propio de A.

- **[Proposición 1]**:
  Dado $A \in \mathcal{M}_{nn}$, son equivalentes:
  1. $\exists x \neq 0$, $Ax = \lambda x$.
  2. $\exists x$ solución no trivial del sistema $(A - \lambda I)x = 0$
  3. $Ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$
  4. $(A - \lambda I)$ no es invertible.

- **[Polinomio Característico]**:
  Llamaremos polinomio característico de una matriz A a $P(\lambda) = |A - \lambda I|$.

- **[Propiedades varias]**:
  1. Todo vector propio tiene asociado un único valor propio.
  2. Cada valor propio tiene un subespacio de vectores propios asociados, el cual llamaremos subespacio propio W_λ.
  3. Si A y B son similares entonces tienen el mismo polinomio característico, es decir $|A - \lambda I| = |B - \lambda I|$ y por ende los mismo valores propios asociados.

- **[Algunas propiedades del determinante]**:
  1. $|I| = 1$ donde I es la identidad.
  2. Si A es triangular superior entonces $|A| = \Pi_{i=1}^{n} a_{ii}$
  3. A es invertible si y solo si $|A| \neq 0$
  4. $|AB| = |A||B|$
  5. $|A| = |A^t|$

P1. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Demuestre que:

a) Si $A^2 = A$ entonces los únicos valores propios asociados de A son 0 y 1.

b) Si B es nilpotente, entonces todos sus valores propios son nulos.

c) Si B es invertible, entonces los reciprocos de los valores propios de B son valores propios de B^{-1}.

d) A no invertible $\Leftrightarrow \lambda = 0$ es valor propio de A.

e) Si A es invertible entonces polinomio característico de AB es igual al de BA.

P2. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcule los valores propios de A y determine una base para cada subespacio propio.

P3. Completar los elementos faltantes de la matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ - & - \end{pmatrix}$$

De modo que admita $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ como vectores propios.

P4. Diagonalice la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$