

P1

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{Ker } f = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

2) • Encuentra base del $\text{Ker } f$ reduciendo el generador.

Como ya vimos en otras ocasiones, el algoritmo consistiría en extraer elementos l.d.'s hasta quedarse con un conjunto l.i..

En particular, podemos notar que

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ es l.d. con $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Para además este último conjunto es l.i.!

Luego solo tendremos que iterar una sola vez

para encontrar la base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

la cual es l.i. y $\text{Ker } f = \langle B \rangle$.

Luego $\dim \text{Ker } f = 2$ y por T.N.I.:

Nulidad

$$\dim \mathbb{R}_3 = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$$

$$\Leftrightarrow 3 = 2 + \dim \text{Im } f$$

$$\Leftrightarrow \underline{\dim \text{Im } f = 1}$$

Rango.

b) Para encontrar f
hacer la separación:

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

f lineal.

$$= x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + x_3 f(e_3)$$

y usar las hipótesis:

$$\bullet f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bullet f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bullet f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escribiéndolo como combinación lineal de $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1) \\ f(e_1) + 0 + f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2) \\ 0 + 0 + f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3) \end{array} \right.$$

de (3) $f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, luego en (2) $f(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

luego en (1) $f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

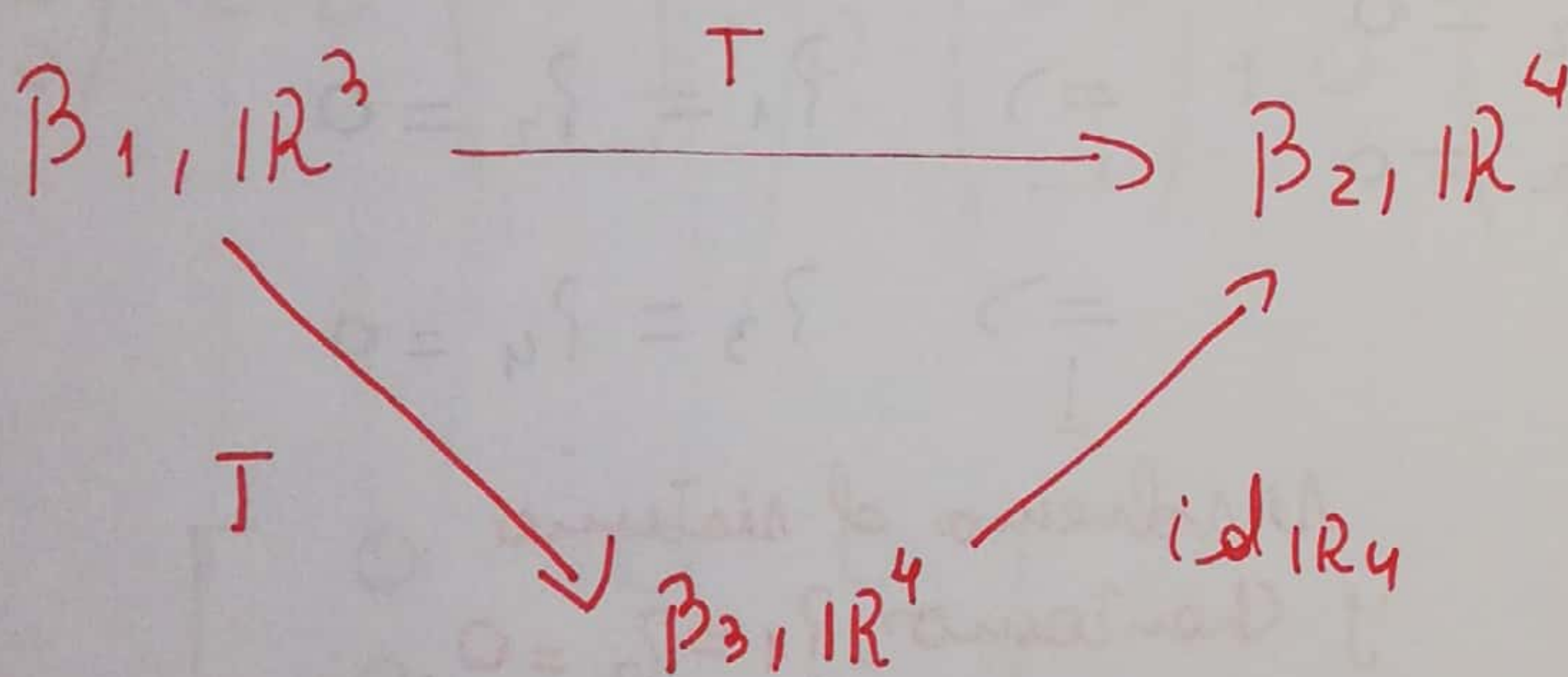
$$\Rightarrow f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c) B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ en } \mathbb{R}^3$$

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ en } \mathbb{R}^4$$

¿cómo proceder?

Podríamos usar matriz pasaje, de manera que:



De modo que B_3 es la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

Ent:

$$M_{B_1, B_2}(T) = \underbrace{M_{B_3, B_2}(\text{id}_{\mathbb{R}^4})}_{\text{Paso de columnas}} \cdot \underbrace{M_{B_1, B_3}(T)}$$

Paso de columnas

→ **Difícil!!** pues si se calcula directamente, no es más fácil que calcular $M_{B_1, B_2}(T)$ directamente.

Y si se encuentra $M_{B_3, B_2}^{-1} = M_{B_2, B_3}$ primero,

se tendría que invertir una matriz de $4 \times 4 \dots$

Por ende, conviene encontrar $M_{B_1, B_2}(T)$ directamente!

Así, podemos:

$$\bullet f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

↳ Estos coef pueden ser obtenidos al tanteo o resolviendo el sistema asociado.

$$\bullet f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$M_{\beta_1, \beta_2}(T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pauta auxiliar 10

P2 $T: V \longrightarrow V$, $\dim V = n$.

Si $\dim(\text{Ker } T) = \dim(\text{Ker } T^2)$

P.D. Q. $\text{Im } T = \text{Im } T^2$

En efecto:

Vemos que nos dice nuestra hipótesis primero:

Tenemos que $\dim(\text{Ker } T) = \dim(\text{Ker } T^2)$, y además tenemos dimensión finita en el dominio ($\dim V = n$).

$\therefore$ La intuición nos dice usar T. N. I.:

Para T : $\dim V = \dim \text{Ker } T + \dim \text{Im } T$ (1)

Para T^2 : $\dim V = \dim \text{Ker } T^2 + \dim \text{Im } T^2$ (2)

$$\Rightarrow \dim \text{Im } T \stackrel{(1)}{=} \dim V - \dim \text{Ker } T \stackrel{\text{hipótesis}}{=} \dim V - \dim \text{Ker } T^2 \stackrel{(2)}{=} \dim \text{Im } T^2$$

$\therefore \dim \text{Im } T = \dim \text{Im } T^2$ y queremos probar que $\text{Im } T = \text{Im } T^2$ que es una igualdad de e.v., por ende basta ver que uno es s.e.v. de otro para concluir.

Vemos que $\text{Im } T^2$ es s.e.v. de $\text{Im } T$. Como ya sabemos que ambos son e.v.'s, basta ver que $\text{Im } T^2 \subseteq \text{Im } T$ en efecto:

$$v \in \text{Im } T^2 \Rightarrow \exists u \in V, T(T(u)) = v \Rightarrow \exists w = T(u) \in V, T(w) = v \Rightarrow v \in \text{Im } T.$$

Algebra lineal

$$\therefore \text{Im } T^2 \subseteq \text{Im } T.$$

Luego como son e.v., $\text{Im } T^2$ es s.e.v. de $\text{Im } T$.

Además como $\dim \text{Im } T^2 = \dim \text{Im } T$, se tiene que

$$\text{Im } T^2 = \text{Im } T$$

Punto Auxiliar 10

P3]

$$W = \{ p \in \mathbb{P}_m \mid p(1) = 0 \}$$

a) P.D.2. W es s.e.v. de $\mathbb{P}_m$

En efecto: Hay que ver:

- $W \neq \emptyset$ ($0 \in W$)
- $W \subseteq \mathbb{P}_m$
- $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall w_1, w_2 \in W, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in W$

- Evidentemente el polinomio $p \equiv 0$ está en W pues $p(1) = 0$ ✓
- $W \subseteq \mathbb{P}_m$ por def. de W ✓
- Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $w_1, w_2 \in W$ arbitrarios.

$$\text{Tenemos que } (\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2)(x) = \lambda_1 w_1(x) + \lambda_2 w_2(x)$$

$$\text{O sea } (\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2)(1) = \lambda_1 w_1(1) + \lambda_2 w_2(1)$$

$$\begin{aligned} \text{Como } w_1, w_2 \in W &\longleftarrow \quad = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in W. \quad \checkmark$$

$\therefore W$ es s.e.v. de $\mathbb{P}_m$

b) Como no tenemos información de W , calculamos un generador primo.

$$\text{Sea } p \in W \Rightarrow p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m \quad \wedge \quad p(1) = 0$$

$$\Rightarrow 0 = a_0 + a_1 + \dots + a_m$$

$$\Rightarrow a_0 = -(a_1 + \dots + a_m)$$

$$\begin{aligned} \text{luego } p(x) &= (-a_1 + \dots + a_m) + a_1 x + \dots + a_m x^m \\ &= a_1(x-1) + \dots + a_m(x^m-1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B = \{(x-1), (x^2-1), \dots, (x^m-1)\}$$

es generador, pues $W \subseteq \langle B \rangle$ y $B \subseteq W$ pues
 $\forall i \in \{1, \dots, m\} \quad x^i - 1 \in W$ (tomar $a_i = 1$ y $a_j = 0$
 $\forall j \neq i$)

$\therefore B$ es generador. A demostrar l.i. pues todo elemento
 en el tiene un grado distinto:

Si $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ t.q.:

$$a_1(x-1) + \dots + a_m(x^m-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{-(a_1 + \dots + a_m) + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m = 0}$$

igualados polinomios

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + \dots + a_m = 0 \\ a_1 = 0 \\ \vdots \\ a_m = 0 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0 \\ \therefore \text{son l.i.} \end{array} \right.$$

luego, B es base y $\dim W = \text{card } B = m$

c) Debemos completar la base de W a una de $\mathbb{P}_m$.

Notar que $\dim W = m$ y $\dim \mathbb{P}_m = m+1$.

$\therefore$ basta agregar un elemento l.i.

En general, es recomendable siempre pensar en añadir algún elemento a la base conocida.

Como los elementos de B son de la forma $x^i - 1$ con $i \in \{1, \dots, m\}$, tienen grado ≥ 1 . Así que añadiremos un polinomio de grado 0:

$$p(x) = 1.$$

$$\therefore B_2 = \{1, (x-1), (x^2-1), (x^3-1), \dots, (x^m-1)\}$$

en la base buscada pues evidentemente es l.i. (todos sus elementos de $\neq$ grado) y $\text{Card } B_2 = m+1 = \dim \mathbb{P}_m$

Punto Auxiliar 10

P4

$$T: M_{2 \times 2} \longrightarrow M_{2 \times 2}$$

$$T(A) = MA + AM, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

o) Se puede argumentar por álgebra de lineales o:

Sean $A_1, A_2 \in M_{2 \times 2}$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} T(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) &= M(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) + (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)M \\ &= \lambda_1 (MA_1 + A_1 M) + \lambda_2 (MA_2 + A_2 M) \\ &= \lambda_1 T(A_1) + \lambda_2 T(A_2) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ T es lineal.

b) Siempre es más fácil analizar el $\text{Ker } T$ primero:

- Encontramos una base:

Como no conocemos nada de $\text{Ker } T$, busquemos un generador:

$$\text{Sea } A \in \text{Ker } T \Rightarrow T(A) = 0$$

$$\Rightarrow MA + AM = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{12} & -a_{11} \\ -a_{22} & -a_{21} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{21} = -a_{12} \\ a_{22} = -a_{11} \\ a_{11} = -a_{22} \\ a_{12} = -a_{21} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{21} = -a_{12} \\ a_{22} = -a_{11} \end{cases}$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{12} & -a_{11} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

luego $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

genera $\text{Ker}(T)$, pues $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(T)$

(basta tomar $a_{12}=0$ y $a_{11}=0$ respectivamente)

Además los elementos de B claramente son l.i.:

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \beta \\ -\beta & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda = \beta = 0$$

$\therefore B$ es base del $\text{Ker } T \Rightarrow \dim \text{Ker } T = 2$

- Para la $\text{Im } T$ tenemos información, por T.N.I.:

$$\dim M_{2 \times 2} = \dim \text{Ker } T + \dim \text{Im } T$$

$$\Leftrightarrow 4 = 2 + \dim \text{Im } T$$

$$\Leftrightarrow \dim \text{Im } T = 2.$$

Luego los bases de $\text{Im } T$ tienen dos elementos.

Busquemos 2 elementos l.i. en la imagen

- Si $A = I$: $T(I) = MI + I \cdot M = 2M$

$$\Rightarrow T\left(I \cdot \frac{1}{2}\right) = M \quad \therefore M \in \text{Im } T$$

- Si $A = M$: $T(M) = M^2 + M^2 = 2M^2$

$$\text{Pero } M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$\Rightarrow T(M) = 2I \Rightarrow T\left(M \cdot \frac{1}{2}\right) = I$$

$$\therefore I \in \text{Im } T.$$

Luego, evidentemente $\{M, I\}$ es l.i.

y como $\dim \text{Im } T = 2 \Rightarrow \{M, I\}$ es base.

- ¿Inyectividad? NO. pues $\dim \text{Ker } T = 2 \neq 0$

- ¿Epimorfismo? NO. pues $\text{Im } T \neq M_{2 \times 2}$ (hasta ver que $\dim \text{Im } T = 2$)

c) P. D. Q. $\text{Ker } T \oplus \text{Im } T = M_{2 \times 2}$

En efecto: hay que ver:
$$\begin{cases} \text{Ker } T \cap \text{Im } T = \{0\} \\ \text{Ker } T + \text{Im } T = M_{2 \times 2} \end{cases}$$

$\text{Ker } T \cap \text{Im } T = \{0\}$ Sea $A \in \text{Ker } T \cap \text{Im } T$

→ Como $A \in \text{Ker } T$, $\exists \alpha_1, \alpha_2$ t.f.:

$$A = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

↳ base del $\text{Ker } T$

→ Como $A \in \text{Im } T$, $\exists \beta_1, \beta_2$ t.f.:

$$A = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

↳ base del $\text{Im } T$.

$$\Rightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} (\alpha_1 - \beta_1) & (\alpha_2 - \beta_2) \\ (-\alpha_2 - \beta_1) & (-\alpha_1 - \beta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \beta_1$$

$$\alpha_2 = \beta_2$$

$$\alpha_2 = -\beta_2$$

$$\alpha_1 = -\beta_1$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \beta_2 = \beta_1 = 0$$

$$\therefore A = 0 \Rightarrow \text{Ker } T \cap \text{Im } T \subseteq \{0\}$$

y como son e.v. $\Rightarrow \text{Ker } T \cap \text{Im } T = \{0\}$.

$$\underline{\text{Ker } T + \text{Im } T = M_{2 \times 2}}$$

- $\text{Ker } T + \text{Im } T$ es S.E.N. de $M_{2 \times 2}$ (pues $\text{Im } T$ y $\text{Ker } T$ lo son)
- sabemos que $\dim(\text{Ker } T + \text{Im } T) = \dim M_{2 \times 2}$

En efecto:

$$\begin{aligned} \dim(\text{Ker } T + \text{Im } T) &= \dim(\text{Ker } T) + \dim(\text{Im } T) - \dim(\text{Im } T \cap \text{Ker } T) \\ &= 2 + 2 - 0 \end{aligned}$$

parte b) más ↙
el hecho que $\text{Im } T \cap \text{Ker } T = \{0\}$

$$= 4 = \dim M_{2 \times 2}$$

∴ Como $\text{Ker } T + \text{Im } T$ es S.E.N. de $M_{2 \times 2}$ y
 $\dim(\text{Ker } T + \text{Im } T) = \dim M_{2 \times 2}$, se concluye
 que $\text{Ker } T + \text{Im } T = M_{2 \times 2}$

$$\Rightarrow \text{finalmente } \text{Ker } T \oplus \text{Im } T = \underline{\underline{M_{2 \times 2}}}$$