MA1102-3: Álgebra Lineal
Profesor: Jaime San Martín
Auxiliar: Felipe Hernández Castro

Auxiliar 10 - Preparación C2

21 de noviembre de 2018

P1. [P2 C2 2014-2]

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal tal que:

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} \text{ y } Ker(f) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

.

a) Encuentre una base de $Ker(f)$ reduciendo el conjunto generador dado e indique, justificando el rango y nulidad de f.

b) Determine explícitamente $f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$.

c) Encuentre la matriz representante de f con respecto a las bases

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \text{ en } \mathbb{R}^3 \text{ y } \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\} \text{ en } \mathbb{R}^4 \ .$$

P2. [P2 C2 2014-2]

Sea $T : V \to V$ una transformación lineal sobre el espacio V de dimensión finita n. Pruebe que:

$$\text{Si } dim(Ker(T)) = dim(Ker(T^2)) \text{ entonces } Im(T) = Im(T^2)$$

.

P3. [P2-b C2 2016-2]

Sea $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ y

$$\mathcal{P}_m = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : p(x) \text{ es polinomio de grado menor o igual que m}\}.$$

y definamos el conjunto $W = \{p \in \mathcal{P}_m | p(1) = 0\}$.

a) Demuestre que W es s.e.v. de $\mathcal{P}_m$

b) De una base de W y calcule su dimensión.

c) Complete la base de W a una base de $\mathcal{P}_m$

P4. [P3 C2 2014-2]

Sea $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ la transformación definida como

$$T(A) = MA + AM, \text{ donde } M = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

a) Pruebe que T es lineal.

b) Calcule base y dimensión para $Ker(T)$ e $Im(T)$ respectivamente. Analice inyectividad y sobreyectividad de T.

c) Pruebe que $Ker(T) \oplus Im(T) = \mathcal{M}_{2\times 2}$.