

P11

a) - Primero vemos que $r(A) = r(AP)$.

Para eso, consideremos:

• $T(x) = Ax$

• $L(x) = (AP)x$

Lo idio es ver que $\text{Im } T = \text{Im } L$, pero así vemos que $\dim \text{Im } T = \dim \text{Im } L$, que es equivalente a $r(A) = r(AP)$.

En efecto:

$$v \in \text{Im } T \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^n, Ax = v$$

Def. de $\text{Im } T$ $\downarrow$

$$\Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{R}^n, APu = v$$

Como P es invertible $\downarrow$

podemos definir $u = P^{-1}x$ o

viceversa $x = Pu$.

$$\Leftrightarrow v \in \text{Im } L$$

$$\therefore \text{Im } T = \text{Im } L \Rightarrow r(A) = r(AP)$$

- Ahora vemos que $r(A) = r(PA)$.

Para eso recordemos que el rango de una matriz es el máximo número de columnas l.i., o en otras palabras, la cardinalidad de una base del subespacio generado por las columnas, o en otras palabras, la dimensión de tal espacio:

$$r(A) = \dim \langle \{A_{\bullet 1}, \dots, A_{\bullet n}\} \rangle.$$

Entonces, la idea es probar que $r(A) = r(PA)$ probando que:

$$\dim \langle \{A_{\bullet 1}, \dots, A_{\bullet n}\} \rangle = \dim \langle \{(PA)_{\bullet 1}, \dots, (PA)_{\bullet n}\} \rangle$$

Esto hay muchas maneras de hacerlo, pero por simplicidad veremos que ambos espacios son isomorfos, es decir, que existe una transformación lineal biyectiva entre $\langle \{A_{\bullet 1}, \dots, A_{\bullet n}\} \rangle$ y $\langle \{(PA)_{\bullet 1}, \dots, (PA)_{\bullet n}\} \rangle$

$$\text{Consideremos } T: \langle \{A_{\bullet 1}, \dots, A_{\bullet n}\} \rangle \longrightarrow \langle \{(PA)_{\bullet 1}, \dots, (PA)_{\bullet n}\} \rangle$$

$$x \longmapsto T(x) = Px$$

- T está bien definido pues $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $(PA)_{\bullet i} = P(A)_{\bullet i}$
- T es biyectiva pues P es invertible ($T^{-1}(x) = P^{-1}x$)

$\therefore$ ambos espacios son isomorfos, lo cual conlleva que

$$r(A) = r(PA) \quad (\text{pues si son isomorfos, deben tener igual dimensión})$$

Nota: Hay muchas maneras de demostrar esto! Si encuentran otra y quieren verificar, no duden en enviarme un mail preguntándome! En particular yo lo hice así para exponer un argumento elegante, pero posiblemente hay caminos más visibles.

b) P.D.Q. A y B semejantes $\Leftrightarrow r(A) = r(B)$

En efecto:

$\Rightarrow$ Como A y B son semejantes (hipótesis de la implicancia) tenemos que existen P y Q matrices invertibles tales que:

$$A = P B Q.$$

Luego:

$$r(A) = r(P B Q) = r(B Q) = r(B)$$

↓
Parte a) y
P invertible

↓
Parte a) y Q
invertible.

$$\therefore r(A) = r(B)$$

$\Leftarrow$ Usaremos la forma normal de hermitte. Esto es, si $r(A)$ es el rango de la matriz, entonces existen matrices P y Q invertibles tal que:

$$A = P H Q, \text{ donde } H_{H(A)} = \begin{pmatrix} I_{r(A)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Con $I_{r(A)}$ la identidad de $r(A)$ por $r(A)$, es decir, H es la matriz con $r(A)$ unos en la diagonal y ceros en las otras coordenadas.

Note: La existencia de esta matriz se demuestra en el apunte (en realidad la existencia de P y Q).

Así, escribimos A y B en su forma normal de Hermitte, usando que $r = r(A) = r(B)$:

$$A = P H_r Q \quad (1) \quad B = T H_r S \quad (2)$$

En particular de (2): $H_r = T^{-1} B S^{-1}$ usando esto en (1) :

$$A = P T^{-1} B$$

Como P, T, Q, S son invertibles, se concluye que

$P T^{-1}$ y $S^{-1} Q$ también lo son, y con ello, que A y B son semejantes //

$$(B) v = (A) v \quad \therefore$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ matriz}$$

c) P.D.Q. $r(AB) \leq \min \{r(A), r(B)\}$

En efecto: Veamos que $r(AB) \leq r(A) \wedge r(AB) \leq r(B)$.

• $r(AB) \leq r(A)$

Para esto, veremos que AB tiene a lo más tantas columnas l.i. como A . Para esto veremos que el espacio generado por las columnas de AB es s.e.v. del espacio generado por las columnas de A :

$$C_1 = \langle \{ (AB)_{\bullet 1}, \dots, (AB)_{\bullet n} \} \rangle = \langle \{ A(B)_{\bullet 1}, \dots, A(B)_{\bullet n} \} \rangle$$

$$C_2 = \langle \{ A_{\bullet 1}, \dots, A_{\bullet n} \} \rangle$$

P.D.Q. $C_1 \subseteq C_2$

En efecto: Sea $M \in C_1$, luego existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tal que:

$$M = \sum_{i=1}^n \alpha_i A(B)_{\bullet i}$$

Pero $A(B)_{\bullet i} = [A_{\bullet 1}, \dots, A_{\bullet n}] \begin{bmatrix} B_{1i} \\ B_{2i} \\ \vdots \\ B_{ni} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n A_{\bullet j} B_{ji}$

Es decir, $A \bullet i$ es una combinación lineal de los columnas de A !, o sea:

$$M = \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{j=1}^n A_{\bullet j} B_{ji}$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m A_{\bullet j} \cdot \alpha_i B_{ji}$$

Intercambiando

Sumas

$$= \sum_{j=1}^n A_{\bullet j} \left[\sum_{i=1}^m \alpha_i B_{ji} \right]$$

Denotando $\beta_j \in \mathbb{R}$.

$$= \sum_{j=1}^n A_{\bullet j} \beta_j \in C_2 \text{ por ser combinación}$$

lineal de columnas $\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}!$

$$\therefore M \in C_2$$

$$\Rightarrow \therefore C_1 \subseteq C_2 \text{ por arbitrariedad de } M$$

O sea, como $C_1 \subseteq C_2$ y ambos son e.v., C_1 es s.e.v. de $C_2 \Rightarrow \dim C_1 \leq \dim C_2$ luego en C_1 hay a lo

más igual cantidad de vectores l.i. que en C_2 ,
lo cual se traduce en que $r(AB) \leq r(A)$.

• $r(AB) \leq r(B)$

Por propiedad del apunte $r(P) = r(P^t)$ para
cualquier matriz P . Aplicando esto:

$$r(AB) = r(B^t A^t) \leq r(B^t) = r(B)$$

$r(AB) = r((AB)^t)$

parte anterior ($r(AB) \leq r(A)$)

$(AB)^t = B^t A^t$

$\therefore r(AB) \leq r(B)$

luego como $r(AB) \leq r(A) \wedge r(AB) \leq r(B)$,

concluimos que $r(AB) \leq \min \{r(A), r(B)\}$

d)

$$r(AB) = r((AB)^t) = r(B^t A^t) = r(BA)$$

$\downarrow$
 A, B simétricos, luego
 $A^t = A \wedge B^t = B$.

Punto Auxiliar 9

P2]

$$T: \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_3$$

$$p \longmapsto T[p](x) = x p(x)$$

a) Consideremos las bases canónicas:

$$A = \{1, x, x^2\} \subseteq \mathbb{P}_2$$

$$B = \{1, x, x^2, x^3\} \subseteq \mathbb{P}_3$$

Para encontrar la matriz representante C/r a estas bases A y B , debemos escribir las imágenes de los elementos de A sobre T , en términos de los elementos de B , es decir:

$$\bullet T[1] = x \cdot 1 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

$$\bullet T[x] = x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

$$\bullet T[x^2] = x^3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3$$

Luego, creamos la matriz representante "acostando" los coeficientes verticalmente en orden:

$$M_{AB}(T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Matriz representante buscada.}$$

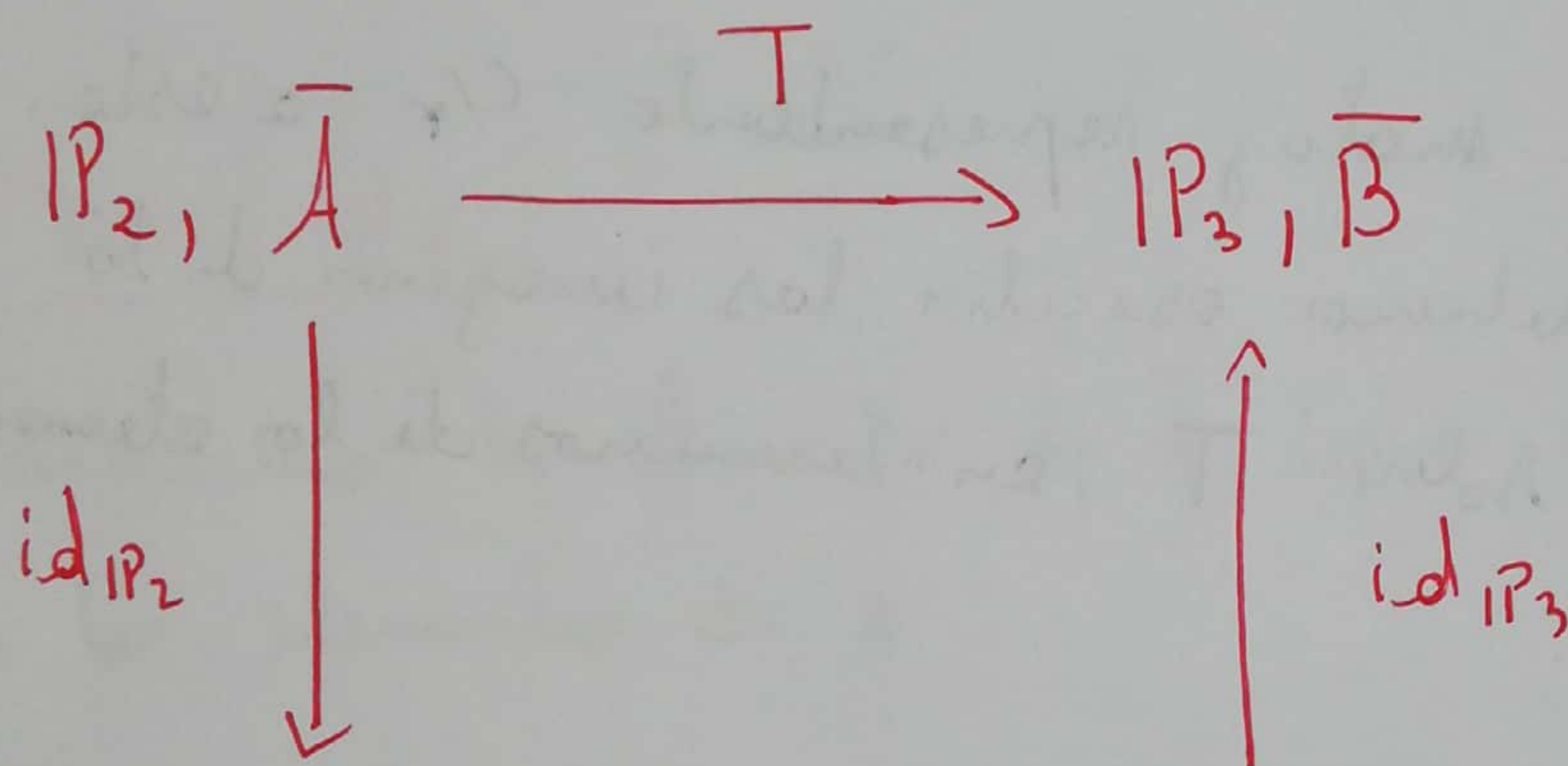
Asociados: $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $T[1] \quad T[x] \quad T[x^2]$

b) Ahora, consideremos los nuevos bases:

$$\bar{A} = \{1, (x-1), (x-1)^2\} \subseteq \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$$

$$\bar{B} = \{1, -x, x^2, x^2 - x^3\} \subseteq \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$$

Encontrar la matriz representante de $T: \mathbb{C}/\mathbb{R}$ a estas bases puede ser una tarea ardua (**Matríz intensa**), en estos casos es útil el cambio de Base. Para inspirarnos, dibujemos:



o no conviene

Por ende, debemos hallar $M_{\bar{A}, A}(\text{id}_{\mathcal{P}_2})$ y $M_{B, \bar{B}}(\text{id}_{\mathcal{P}_3})$.

Matriz rep. de id_2 de las bases A (dada) a $\bar{A}$ (convenio)

Matriz rep. de id_3 de las bases B a $\bar{B}$

Pues sí, podemos usar el teorema de la matriz representante de la composición:

$$M_{\bar{A}, \bar{B}}(T) = M_{\bar{A}, \bar{B}}(\text{id}_{\mathbb{P}_3} \circ T \circ \text{id}_{\mathbb{P}_2})$$

$$= \underbrace{M_{\bar{B}, \bar{B}}(\text{id}_{\mathbb{P}_3})}_{\text{por encontrar}} \cdot \underbrace{M_{AB}(T)}_{\substack{\downarrow \\ \text{Encontrado en} \\ \text{la parte a)}}} \cdot \underbrace{M_{\bar{A}, A}(\text{id}_{\mathbb{P}_2})}_{\text{Por encontrar}}$$

• $M_{\bar{A}, A}(\text{id}_{\mathbb{P}_2})$

Escribimos los elementos de $\bar{A}$ como combinación lineal de los elementos de A :

- $1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$
- $x-1 = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2$
- $(x-1)^2 = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot x + 1 \cdot x^2$

Luego, la matriz buscada será:

$$M_{\bar{A}, A}(\text{id}_{\mathbb{P}_2}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• $M_{\beta, \bar{\beta}}(\text{id}_{\mathbb{P}_3})$

En general, esta es la matriz más difícil de hallar.

Debemos expresar los elementos de β en función de los de $\bar{\beta}$:

- $1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-x) + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot (x^2 - x^3)$
- $x = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-x) + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot (x^2 - x^3)$
- $x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-x) + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot (x^2 - x^3)$
- $x^3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-x) + 1 \cdot x^2 + (-1) \cdot (x^2 - x^3)$

↳ ¿cómo hallar los coeficientes? En este caso, al tratarlo pues no es muy complejo, de otra forma habría que resolver un sistema de ecuaciones! pero muy difícilmente se encontrarían con un problema así. Otro manera también es encontrando $M_{\bar{\beta}, \beta}(\text{id}_{\mathbb{P}_3})$ por $M_{\beta, \bar{\beta}}(\text{id}_{\mathbb{P}_3}) = M_{\bar{\beta}, \beta}(\text{id}_{\mathbb{P}_3})^{-1}$.

Luego:

Ver anexo d final.

$$M_{\beta, \bar{\beta}}(\text{id}_{\mathbb{P}_3}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

finden:

$$M_{\bar{A}, \bar{B}}(T) = M_{B, \bar{B}}(\text{id}_{\mathbb{P}_3}) \cdot M_{A, B}(T) \cdot M_{\bar{A}, A}(\text{id}_{\mathbb{P}_2})$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore M_{\bar{A}, \bar{B}}(T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ameo: Como dijimos, tambien podemos encontrar

$$M_{\beta, \bar{\beta}}(\text{id}_{\mathbb{P}_3}), \text{ invirtiendo } M_{\bar{\beta}, \beta}(\text{id}_{\mathbb{P}_3}).$$

Vamos que llegamos a lo mismo:

$$\bar{\beta} = \{1, -x, x^2, x^2 - x^3\}$$

$$\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$$

Orí, escribiendo $\bar{\beta}$ en función de β :

$$1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

$$-x = 0 \cdot 1 + (-1) x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

$$x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

$$x^2 - x^3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2 + (-1) x^3$$

Luego:

$$M_{\bar{\beta}, \beta}(\text{id}_{\mathbb{P}_3}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Lo cual lo podemos invertir con metodo de Gauss:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$E_{43}(1) \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \text{file 2 por } (-1) \\ \text{file 4 por } (-1) \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & & & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & 1 & & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & & & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

$$\therefore M_{\beta, \bar{\beta}}(id_{\mathbb{P}_3}) = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

identical of the methods.

P3

$$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(1) B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(2) M_{BB}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a) \text{ Sea } \mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \text{ queremos}$$

$$\text{hallar } M_{B,\mathcal{A}}(T).$$

Usaremos nuestro dato!

Usando (2), tenemos que las imágenes de los elementos de B pueden ser escritos como:

$$\bullet T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\bullet T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (*)$$

$$\bullet T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pero para encontrar $M_{B,\mathcal{A}}(T)$ debemos escribir las imágenes de los elementos de B en función de la base canónica.

Osr:

$$\bullet T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Osr:

$$M_{\beta\alpha}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

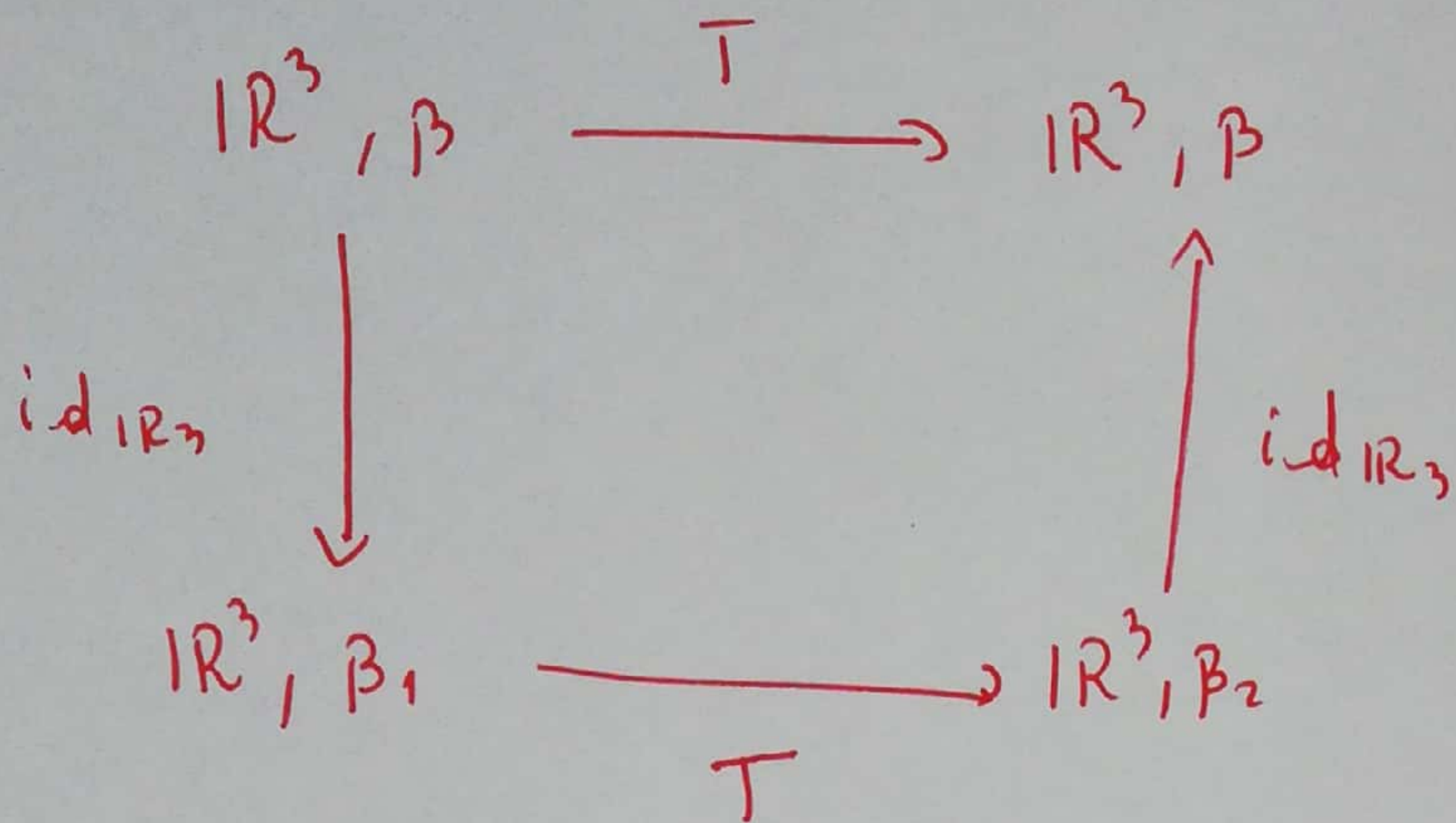
que solo luzados

6) Nota que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tiene rango 1, en cambio

$$M_{\beta\beta}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ tiene rango 2}$$

¿Podemos argumentar por ahí? En efecto!

Usamos cambio de base.



Tenemos que:

$$M_{\beta, \beta}(T) = \underbrace{M_{\beta_2, \beta}(\text{id}_{\mathbb{R}^3})}_{\text{Homomodo P}} \cdot M_{\beta_1, \beta_2}(T) \cdot \underbrace{M_{\beta, \beta_1}(\text{id}_{\mathbb{R}^3})}_{\text{Homomodo Q.}}$$

$$\Rightarrow M_{\beta, \beta}(T) = P \cdot M_{\beta_1, \beta_2}(T) \cdot Q$$

Con P y Q invertibles pues son matrices representantes de una función lineal (id $_{\mathbb{R}^3}$)

$\therefore M_{\beta, \beta}(T)$ y $M_{\beta_1, \beta_2}(T)$ serían semejantes

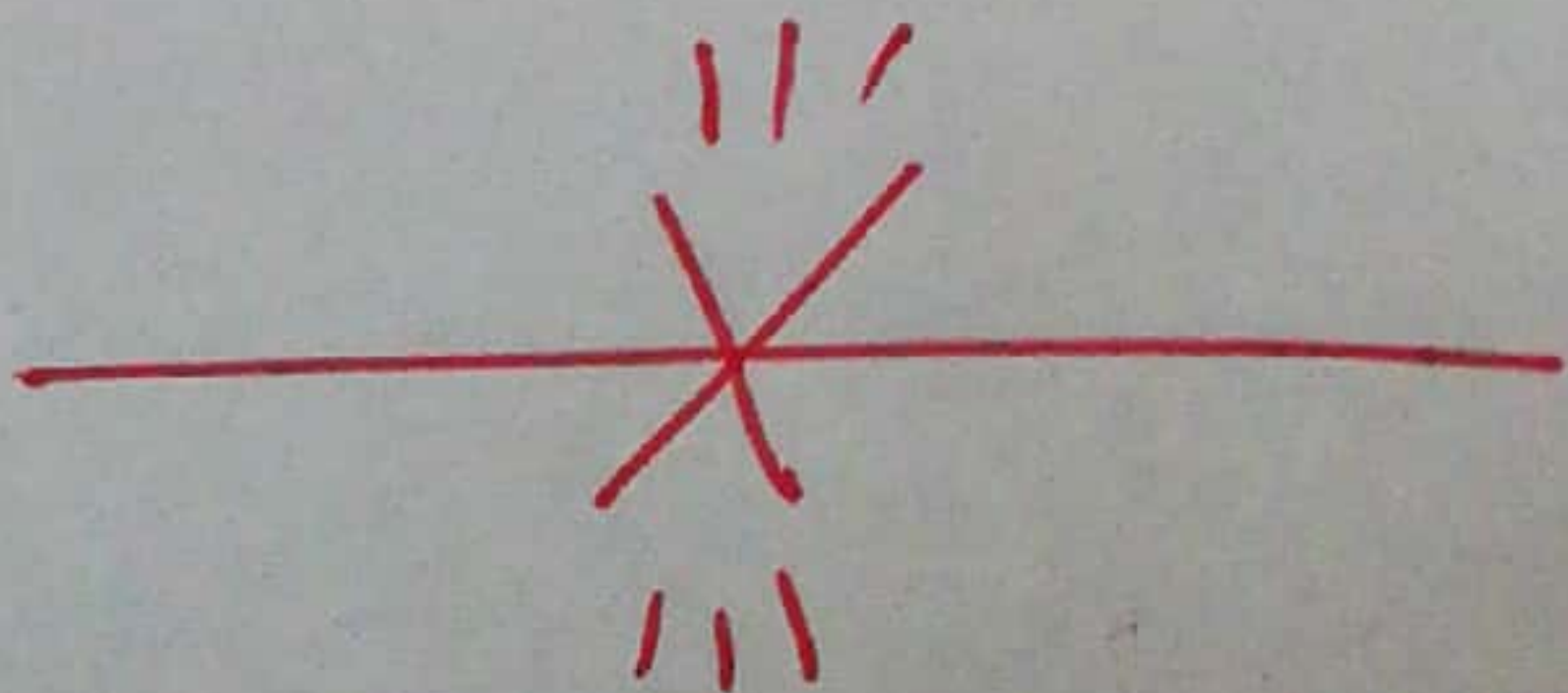
Si existen tales bases β_1 y β_2 .

P1-6)

$\Rightarrow$

$$\text{r}(M_{\beta, \beta}(T)) = 2 = 1 = \text{r}(M_{\beta_1, \beta_2}(T))$$

(Matrices semejantes deben tener igual rango.)



Por ende, no existen tales bases β_1, β_2

P4

a) Podemos los elementos de la base canónica por T :

- $T(1) = 1 \cdot x^3 + 1 \cdot (x-4)^2 = 16 \cdot (1) + (-8) \cdot x + 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3$
- $T(x) = 1 \cdot (x-4)^2 = 16 \cdot 1 + (-8) \cdot x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$
- $T(x^2) = 1 \cdot (x-4)^2 = 16 \cdot 1 + (-8) \cdot x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$
- $T(x^3) = 1 \cdot (x-4)^2 = 16 \cdot 1 + (-8) \cdot x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$

Luego:

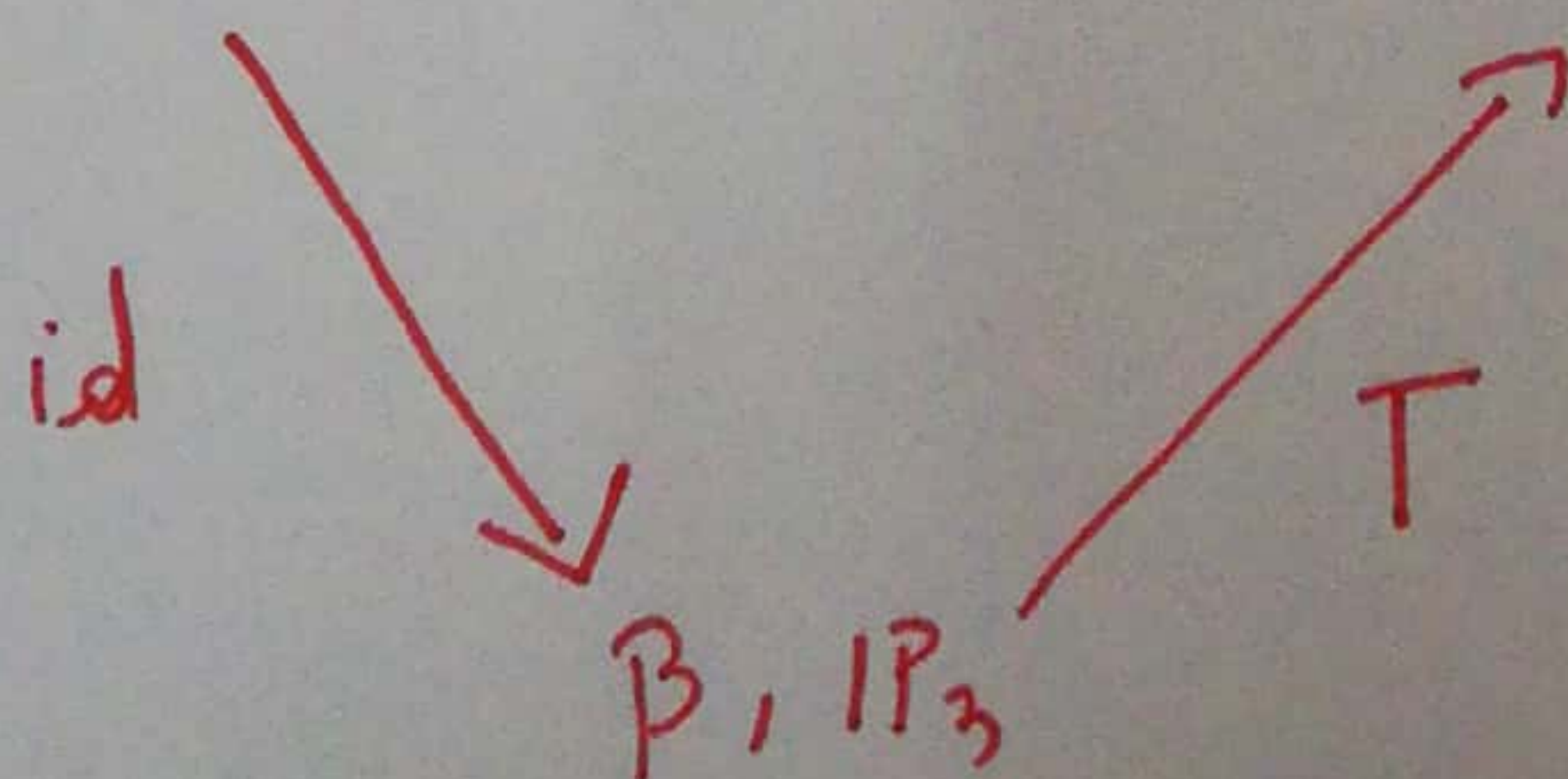
$$M_{\beta\beta}(T) = \begin{bmatrix} 16 & 16 & 16 & 16 \\ -8 & -8 & -8 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Podemos escribir $M_{\beta',\beta}(T)$ como:

$$M_{\beta',\beta}(T) = M_{\beta',\beta}(T \circ \text{id}_{\mathbb{P}^3}) = \underbrace{M_{\beta\beta}(T)}_{\text{encontrado en a)}} \cdot \underbrace{M_{\beta',\beta}(\text{Id})}_{\text{Matriz paralela}}$$

Esto lo podemos ver por el diagrama:

$$\beta', \mathbb{P}^3 \xrightarrow{T} \beta, \mathbb{P}^3$$



camino alternativo

Oró, columnas $M_{\beta', \beta}(\text{Id})$:

$$1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

$$x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

$$(x-4)^2 = 16 \cdot 1 + (-8) \cdot x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

$$x^3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3$$

Luego la matriz representante será:

(Paralelo)

$$M_{\beta', \beta}(\text{Id}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{\beta', \beta}(T) = \begin{bmatrix} 16 & 16 & 16 & 16 \\ -8 & -8 & -8 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Encuentro de e_1

Paralelo de
 $\beta' \in \beta$