MA1102-3: Álgebra Lineal
Profesor: Jaime San Martín
Auxiliar: Felipe Hernández Castro

Resumen - C2

18 de noviembre 2018

4.-Espacios Vectoriales

- **[Espacio Vectorial]**:
  Dado un grupo abeliano $(V, +)$ y un cuerpo $\mathcal{K}$. Diremos que V es un espacio vectorial sobre $\mathcal{K}$ si y solo si $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{K}$, $\forall x, y \in V$:

EV1: $(\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$.

EV2: $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

EV3: $\lambda(\beta x) = (\lambda\beta)x$.

EV4: $1 \cdot x = x$, donde 1 es el neutro multiplicativo del cuerpo $\mathcal{K}$.

- **[Subespacio Vectorial]**:
  Sea un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathcal{K}$. Diremos que un subconjunto $U \neq \emptyset$ de V, es un subespacio vectorial (s.e.v.) de V si cumple:
  - $\forall u, v \in U$, $u + v \in U$
  - $\forall \lambda \in \mathcal{K}$, $\forall u \in U$, $\lambda u \in U$

- **[Caracterización Subespacio Vectorial]**:
  Sea un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathcal{K}$. Diremos que U es s.e.v. de V si cumple:
  - $0_V \in U$ (U no vació)
  - $U \subseteq V$
  - $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{K}$, $\forall u_1, u_2 \in U$, $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in U$

- **[Combinación Lineal]**:
  Dado una colección $v_1, ..., v_n$ de vectores en un espacio vectorial V y de escalares $\lambda_1, ..., \lambda_n$ en $\mathcal{K}$.Denominamos combinación lineal a la suma ponderada de vectores:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

- **[Independencia Lineal]**:
  Dado el conjunto de vectores $\{x_1, ..., x_n\}$, diremos que es linealmente independiente si:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \Longrightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$$

Con $\lambda_i \in \mathcal{K}$ escalares.

- **[Conjunto generador]**:
  Sea V un e.v., diremos que los vectores $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$ generan V si y solo si:

$$\langle \{v_1, ..., v_n, \} \rangle = V$$

Observación: Como $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$, la inclusion $\langle \{v_1, ..., v_n\} \rangle \subseteq V$ se tiene por definicion de espacio vectorial. Luego solo basta ver: $\forall v \in V, \exists \{\lambda_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathbb{K}$ tal que $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$.

- **[Base]**:
  Dado un e.v V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, diremos que el conjunto de vectores $\{v_i\}_{i=1}^{n}$ es base de V si y sólo si:
  1. $\{v_i\}_{i=1}^{n}$ es l.i.
  2. $\{v_i\}_{i=1}^{n}$ genera V.

- **[Proposición 1]**:
  Dado un e.v V, $B = \{v_i\}_{i=1}^{n}$ es base si y sólo si $\forall v \in V$, v se escribe de manera única como combinación lineal de los vectores del conjunto B.

- **[Proposición 2]**: Si $X = \{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$ es un conjunto generador, entonces es posible extraer un subconjunto $B = \{v_{i_1}, ..., v_{i_s}\}$ que es base de V.

- **[Proposición 3]**:
  Si $B = \{v_i\}_{i=1}^{n}$ es base de V, y $X = \{w_i\}_{i=1}^{m}$ con $m > n$, entonces el conjunto X es *l.d.* .

- **[Teoremas de dimensión]**:
  1. Sea $dim\ V = n$. Si $\{v_i\}_{i=1}^{n}$ es l.i. o genera, entonces es base.
  2. Sea U s.e.v. de V, luego $dim\ U \leq dim\ V$, más aún se tiene que $dim\ U = dim\ V \Rightarrow U = V$.

- **[Teorema de completación de bases]**:
Dado un e.v. V con $dim\ V = n$, y un conjunto de vectores l.i. $\{v_1, ..., v_r\}$, con $r < n$, entonces existen vectores $v_{r+1}, ..., v_n$, tales que el conjunto $\{v_1, ..., v_n\}$ es base de V.

- **[Suma de espacios vectoriales]**:
Sean U, W s.e.v. de V, se define:
$$U + W = \{v \in V | v = u + w, u \in U, w \in W\}.$$
Observación: $U + W$ es s.e.v. de V.

- **[Suma Directa]**:
Sean U, W s.e.v. de V, diremos que $Z = U+W$ es suma directa de U y W, denotando $U \oplus W = Z$ si $\forall v \in Z$ se escribe de manera unica como :
$$v = u + w, \quad u \in U, w \in W.$$

- **[Caracterización de la suma directa]**:
Dado V e.v. y U, W, Z s.e.v. de V, entonces:
$$U \oplus W = Z \Leftrightarrow (Z = U + W) \wedge (U \cap W = \{0\})$$

- **[Dim de la suma directa]**:
Sea V de dimensión finita.
  1. Si $V = U \oplus W$ y V, entonces $dim\ V = dim\ U + dim\ W$
  2. Si $V = U + W$ y V, entonces $dim\ V = dim\ U + dim\ W - dim\ U \cap W$

5.-Transformaciones lineales

- **[Transformación lineal]**:
Sean U y V e.v, llamaremos transformación lineal a toda funcion $T : U \longrightarrow V$ tal que:
  1. $\forall u_1, u_2 \in U, T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$
  2. $\forall u \in U, \lambda \in K, T(\lambda u) = \lambda T(u)$

- **[Propiedades elementales]**:
  1. $T(0) = 0 \in V$
  2. $T(-u) = -T(u)$
  3. T es lineal si y solo si $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, \forall u_1, u_2 \in U$.
  $$T(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 T(u_1) + \lambda_2 T(u_2)$$

- **[Composición e inversa de lineas]**:
  - Sean $T : U \longrightarrow V$ y $L : V \longrightarrow W$ lineales. Luego $L \circ T : U \longrightarrow W$ es lineal.
  - Sea $T : U \longrightarrow V$ lineal y biyectiva. Entonces $T^{-1} : V \longrightarrow U$ es lineal.

- **[Kernel]**:
Sea $T : U \longrightarrow V$ lineal. Se define el Kernel o Nucleo de T como:
$$KerT = \{x \in U | T(x) = 0\}$$
Observación: $KerT$ es un s.e.v. de U, llamaremos nulidad a $dim\ KerT$.

- **[Imagen]**:
Sea $T : U \longrightarrow V$ lineal. Se define la imagen de T como:
$$ImT = \{v \in V | \exists u \in U, T(u) = v\} = T(U)$$
Observación: ImT es un s.e.v. de V, llamaremos rango a $dim\ ImT$.

- **[Biyectividad de T]**:
Sea $T : U \longrightarrow V$ lineal.
  1. T es inyectiva si y sólo si $KerT = \{0\}$
  2. T es isomorfismo si y sólo si $KerT = \{0\}$ y $ImT = V$ o equivalentemente $dim\ ImT = dim\ V$ y $dim\ KerT = 0$
  3. Si T es inyectiva entonces $\{u_i\}_{i=1}^k$ es l.i. $\Rightarrow$ $\{T(u_i)\}_{i=1}^k$ es l.i.

- **[TNI]**:
Sean U, V e.v's, y $T : U \longrightarrow V$ lineal, tal que $dim\ U < \infty$. Entonces:
$$dim\ U = dim\ KerT + dim\ ImT$$

- **[Teoremas de inyectividad y epiyectividad]**:
Sea $T : U \longrightarrow V$ lineal.
  1. Si $dim\ U = dim\ V$ entonces T inyectiva $\Leftrightarrow$ T epiyectiva.
  2. Si $dim\ U > dim\ V$ entonces T no es inyectiva.
  3. Si $dim\ U < dim\ V$ entonces T no es epiyectiva.
  4. $U \cong V \Leftrightarrow dim\ U = dim\ V$.

- [**Matriz representante**]:
  Sea $T : U \to V$ lineal, y sean $\beta_U = \{u_1, ..., u_n\}$ y $\beta_V = \{v_1, ..., v_m\}$ bases de U y V respectivamente, entonces llamaremos matriz representante de T con respecto a las bases β_U y β_V a la matriz $M_{\beta_U\beta_V}(T)$ que se construye a través de los coeficientes obtenidos al expresar cada $T(u_i)$ como combinación lineal de los vectores de la base β_V, es decir:

$$\begin{aligned} T(u_1) &= \quad a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + ... + a_{m1}v_m \\ T(u_1) &= \quad a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + ... + a_{m2}v_m \\ &\vdots \\ T(u_n) &= \quad a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + ... + a_{mn}v_m \end{aligned} \qquad M_{\beta_U\beta_V}(T) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- [**Matriz representante de la composición**]:
  Sean $T : U \to V$, $L : V \to W$ aplicaciones lineales, tales que β_U, β_V y β_W son bases de U, V y W respectivamente, entonces se tiene que:

$$M_{\beta_U\beta_W}(L \circ T) = M_{\beta_V\beta_W}(L)M_{\beta_U\beta_V}(T)$$

  Observación: En particular, podemos notar que $T = id_V \circ T \circ id_U$, luego si nos piden encontrar la matriz representante de T con respecto a las bases $\bar{\beta}$ y $\bar{\beta}'$ (de U y V resp.), siempre podemos pasar por las bases canónicas (β y β') si es que esto hace el proceso mas fácil, de manera que $M_{\bar{\beta}\bar{\beta}'}(T) = M_{\beta'\bar{\beta}'}(id_V)M_{\beta\beta'}(T)M_{\bar{\beta}\beta}(id_U)$.

$$\begin{tikzcd} U, \overline{\beta} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "id_U"'] & V, \overline{\beta}' \\ U, \beta \arrow[r, "T"] & V, \beta' \arrow[u, "id_V"'] \end{tikzcd}$$

- [**Matrices semejantes**]:
  Dos matrices A y B se dirán semejantes si existen matrices P y Q invertibles tales que:

$$A = PBQ$$

  Si $Q = P^{-1}$ diremos que las matrices son similares.

- [**Rango**]:
  Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}$, se define $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $T(x) = Ax$. Llamaremos rango de la matriz A a la dimensión de la imagen de T, es decir $r(A) = dim \;\; ImT$.

- [**Propiedades del Rango**]:
  (I) Dos matrices A y B son semejantes si y solo si $r(A) = r(B)$.
  (II) El rango de una matriz es el numero de columnas (filas) l.i.
  (III) $r(AB) \leq min\{r(A), r(B)\}$.
  (IV) Sea $A \in \mathcal{M}_{pq}$, se tiene que $r(A) = r(A^t) \leq min\{p, q\}$.