

MA1102-3: Álgebra Lineal**Profesor:** Jaime San Martín**Auxiliar:** Felipe Hernández Castro**Auxiliar 9 - Matriz representante**

19 de noviembre de 2018

P1. Sean A , B y P matrices.

- Demuestre que si P es invertible, entonces $r(A) = r(AP) = r(PA)$.
- Demuestre que A y B son semejantes si y solo si $r(A) = r(B)$.
- Demuestre que $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$.
- Demuestre que si A y B son simétricas, entonces $r(AB) = r(BA)$.

P2. [C2 P1 2017-2]Sea $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ la aplicación lineal $T[p](x) = xp(x)$.

- Calcule la matriz representante de T con respecto a las bases canónicas.
- Calcule, usando cambio de bases, la matriz representante de T con respecto a las bases

$$\bar{\mathcal{A}} = \{1, x-1, (x-1)^2\} \subseteq \mathbb{P}_2(\mathbb{R}), \quad \bar{\mathcal{B}} = \{1, -x, x^2, x^2-x^3\} \subseteq \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$$

P3. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que su matriz representante con respecto a la base

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \text{ en la partida y en la llegada es } M_{\beta\beta}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Encuentre la matriz representante de T respecto a la base β en la partida y la base canónica en la llegada.
- ¿Existen bases β_1, β_2 de $\mathbb{R}^3$ tales que $M_{\beta_1\beta_2}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

P4. [Propuesto]Considere el e.v. $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ y la aplicación $T : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, definida por:

$$T(p(x)) = p(0)x^3 + p(1)(x-4)^2$$

- Calcule la matriz representante respecto a la base canónica $\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$ en la partida y en la llegada.
- Usando matriz pasaje (o de cambio de base), calcule la matriz representante de T cuando en la partida se considera la base $\beta' = \{1, x, (x-4)^2, x^3\}$ y en la llegada la base canónica.

Resumen■ **[Matriz representante]:**

Sea $T : U \rightarrow V$ lineal, y sean $\beta_U = \{u_1, \dots, u_n\}$ y $\beta_V = \{v_1, \dots, v_m\}$ bases de U y V respectivamente, entonces llamaremos matriz representante de T con respecto a las bases β_U y β_V a la matriz $M_{\beta_U \beta_V}(T)$ que se construye a través de los coeficientes obtenidos al expresar cada $T(u_i)$ como combinación lineal de los vectores de la base β_V , es decir:

$$\begin{aligned} T(u_1) &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{m1}v_m \\ T(u_1) &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{m2}v_m \\ &\vdots \\ T(u_n) &= a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{mn}v_m \end{aligned} \quad M_{\beta_U \beta_V}(T) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

■ **[Matriz representante de la composición]:**

Sean $T : U \rightarrow V$, $L : V \rightarrow W$ aplicaciones lineales, tales que β_U , β_V y β_W son bases de U , V y W respectivamente, entonces se tiene que:

$$M_{\beta_U \beta_W}(L \circ T) = M_{\beta_V \beta_W}(L) M_{\beta_U \beta_V}(T)$$

Observación: En particular, podemos notar que $T = id_V \circ T \circ id_U$, luego si nos piden encontrar la matriz representante de T con respecto a las bases $\bar{\beta}$ y $\bar{\beta}'$ (de U y V resp.), siempre podemos pasar por las bases canónicas (β y β') si es que esto hace el proceso mas fácil, de manera que $M_{\bar{\beta} \bar{\beta}'}(T) = M_{\beta' \bar{\beta}'}(id_V) M_{\beta \beta'}(T) M_{\bar{\beta} \beta}(id_U)$.

$$\begin{array}{ccc} U, \bar{\beta} & \xrightarrow{T} & V, \bar{\beta}' \\ id_U \downarrow & & \uparrow id_V \\ U, \beta & \xrightarrow{T} & V, \beta' \end{array}$$

■ **[Matrices semejantes]:**

Dos matrices A y B se dirán semejantes si existen matrices P y Q invertibles tales que:

$$A = PBQ$$

Si $Q = P^{-1}$ diremos que las matrices son similares.

■ **[Rango]:**

Sea $A \in \mathcal{M}_{mn}$, se define $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $T(x) = Ax$. Llamaremos rango de la matriz A a la dimensión de la imagen de T , es decir $r(A) = \dim \text{Im} T$.

■ **[Propiedades del Rango]:**

- (I) Dos matrices A y B son semejantes si y solo si $r(A) = r(B)$.
- (II) El rango de una matriz es el numero de columnas (filas) l.i.
- (III) $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$.
- (IV) Sea $A \in \mathcal{M}_{pq}$, se tiene que $r(A) = r(A^t) \leq \min\{p, q\}$.