Pauta Auxiliar 8

P1

a) La idea es - la mayoría de las veces - ocupar la propiedad compacta:

P.D.Q. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $\forall u, v \in U$,

$$L \circ T(\lambda_1 u + \lambda_2 v) = \lambda_1 L \circ T(u) + \lambda_2 L \circ T(v).$$

En efecto:

Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ y $u, v \in U$ cualesquiera.

$$\begin{aligned} L \circ T(\lambda_1 u + \lambda_2 v) &= L(T(\lambda_1 u + \lambda_2 v)) \\ &\overset{T \text{ es lineal}}{=} L(\lambda_1 T(u) + \lambda_2 T(v)) \\ &\overset{L \text{ es lineal}}{=} \lambda_1 L(T(u)) + \lambda_2 L(T(v)) \\ &= \lambda_1 L \circ T(u) + \lambda_2 L \circ T(v). \end{aligned}$$

$\therefore$ $L \circ T$ es lineal.

b) De nuevo, usemos propiedad compacta:

P.D.Q. $\forall \lambda_1, \lambda_2$, $\forall v, w \in V$, $T^{-1}(\lambda_1 v + \lambda_2 w) = \lambda_1 T^{-1}(v) + \lambda_2 T^{-1}(w)$

En efecto: Sean $v, w \in V$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$

Como $v, w \in V$ y T es biyectiva:

$\exists\, u_1, u_2 \in U$ tal que $T(u_1) = v \wedge T(u_2) = w$

Así:

$$T^{-1}(\lambda_1 v + \lambda_2 w) = T^{-1}(\lambda_1 T(u_1) + \lambda_2 T(u_2))$$

T es lineal

$$= T^{-1}(T(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2))$$

$$= \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$$

$T(u_1) = v \wedge T(u_2) = w$

$$= \lambda_1 T^{-1}(v) + \lambda_2 T^{-1}(w)$$

$\therefore\ T^{-1}$ es lineal

P1 c) $T: U \longrightarrow U$ lineal

1) P. D. Q. $T \circ T = 0 \iff \operatorname{Im} T \subseteq \operatorname{Ker} T$

En efecto:

$\Rightarrow$ Sabemos que $T \circ T = 0$ y debemos ver que $\operatorname{Im} T \subseteq \operatorname{Ker} T$

Sea $u \in \operatorname{Im} T$ arbitrario

P. D. Q. $u \in \operatorname{Ker} T$

En efecto: Como $u \in \operatorname{Im} T$, entonces existe $\bar{w} \in U$ tal que $T(\bar{w}) = u$

Luego, aplicando $T(\cdot)$ a ambos lados:

$$T(T(w)) = T(u)$$

pero $T(T(w)) = 0$ por hipotesis de la implicancia.

$$\Rightarrow T(u) = 0 \Rightarrow u \in \operatorname{Ker} T \therefore \operatorname{Im} T \subseteq \operatorname{Ker} T.$$

$\Leftarrow$ Sabemos que $\operatorname{Im} T \subseteq \operatorname{Ker} T$ y debemos ver que $T \circ T = 0$, en efecto:

Sea $u \in U$, luego $T(u) \in U$, pero ademas $T(u) \in \operatorname{Im} T$

Trivialmente. Como $\operatorname{Im} T \subseteq \operatorname{Ker} T \Rightarrow T(u) \in \operatorname{Ker} T$

Así: $T(T(u)) = 0 \iff T \circ T(u) = 0$

$\therefore\ T \circ T = 0.$

2)

P. D. Q. $T \circ T = T \Rightarrow U = \operatorname{Im} T \oplus \operatorname{Ker} T$

En efecto:

Nuestra hipótesis es que $T \circ T = T$.
Usemos la caracterización de la suma directa: Hay que ver que $(\operatorname{Im} T \cap \operatorname{Ker} T = \{0\}) \wedge (U = \operatorname{Im} T + \operatorname{Ker} T)$

- $\operatorname{Im} T \cap \operatorname{Ker} T = \{0\}$

En efecto: $\supseteq]$ $\{0\} \subseteq \operatorname{Im} T \cap \operatorname{Ker} T$ pues $\operatorname{Im} T$ y $\operatorname{Ker} T$ son s.e.v.'s

$\subseteq]$ Sea $u \in \operatorname{Im} T \cap \operatorname{Ker} T$.

- Como $u \in \operatorname{Ker} T \Rightarrow T(u) = 0$ (1)
- Como $u \in \operatorname{Im} T \Rightarrow \exists w \in U,\ T(w) = u$ (2)

Reemplazando u en (1) con (2):

$T(T(w)) = 0$

Pero por hipótesis de la implicancia $T \circ T = T$

En particular $T(T(w)) = T(w)$

Pero $T(T(w)) = 0 \Rightarrow T(w) = 0$

Luego, usando (2) se tiene que $u = 0$

$\therefore \quad \operatorname{Im} T \cap \operatorname{Ker} T \subseteq \{0\}$

Así por doble inclusión: $\operatorname{Im} T \cap \operatorname{Ker} T = \{0\}$

- $U = \operatorname{Im} T + \operatorname{Ker} T$

Sea $u \in U$. Hay que ver que se puede escribir como un elemento de la Imagen más otro del Nucleo de T.

¿Como empezar? Usemos la hipotesis! tenemos que:

$$T(u) = T(T(u))$$

Luego $T(T(u)) - T(u) = 0$

Pero T es lineal! Así: $T(T(u) - u) = 0$

Luego $T(u) - u \in \operatorname{Ker} T$ o escrito de manera más conveniente: $u - T(u) \in \operatorname{Ker} T$

Tenemos a un elemento "interesante" en el Ker T

¿Nos servira? Escribamos u como suma de $(u - T(u))$ y algo más para completar.

$$u = \underbrace{u - T(u)}_{\in \operatorname{Ker} T} + \underbrace{T(u)}_{\in \operatorname{Im} T}$$

Sorpresa! lo que faltaba era precisamente un elemento en la Im T $\therefore$ u se escribe como suma de elementos en el Kernel y en la Imagen

Luego $U = \operatorname{Im} T + \operatorname{Ker} T$

Finalmente $U = \operatorname{Im} T \oplus \operatorname{Ker} T$

c)

P.D.Q. $\operatorname{Im} T = \operatorname{Ker} T \Leftrightarrow [2 \dim(\operatorname{Ker} T) = \dim U \wedge \operatorname{Im} T \subseteq \operatorname{Ker} T]$

En efecto:

$\Rightarrow]$ Como $\operatorname{Im} T = \operatorname{Ker} T$, en particular $\operatorname{Im} T \subseteq \operatorname{Ker} T$.

Además por T.N.I. $\dim U = \dim(\operatorname{Ker} T) + \dim(\operatorname{Im} T)$

$$= 2 \dim(\operatorname{Ker} T)$$

$\operatorname{Im} T = \operatorname{Ker} T$ ↵

$\therefore \operatorname{Im} T \subseteq \operatorname{Ker} T \wedge \dim U = 2 \dim \operatorname{Ker} T$

$\Leftarrow$ Hay que ver que $\operatorname{Im} T = \operatorname{Ker} T$.

- Como $\operatorname{Im} T \subseteq \operatorname{Ker} T$, $\operatorname{Im} T$ es s.e.v. de $\operatorname{Ker} T$ (No es necesario probar las demás condiciones sobre s.e.v.'s pues se sabe que $\operatorname{Im} T$ y $\operatorname{Ker} T$ son e.v.'s)

- Veamos que $\dim(\operatorname{Ker} T) = \dim(\operatorname{Im} T)$.

En efecto:

Por T. N. I. $\quad \dim U = \dim(\operatorname{Im} T) + \dim(\operatorname{Ker} T)$

Pero por hipótesis de la implicancia: $\dim U = 2\dim(\operatorname{Ker} T)$

Luego:

$$2\dim(\operatorname{Ker} T) = \dim(\operatorname{Ker} T) + \dim(\operatorname{Im} T)$$

$$\Rightarrow \quad \dim(\operatorname{Ker} T) = \dim(\operatorname{Im} T)$$

//

Luego como $\operatorname{Im} T$ es s.e.v. de $\operatorname{Ker} T$ y $\dim(\operatorname{Ker} T) = \dim(\operatorname{Im} T)$, se tiene que

$\operatorname{Im} T = \operatorname{Ker} T$ //

Pauta Auxiliar 8

P2)

$$T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_4(\mathbb{R})$$
$$p \longmapsto T[p](x) = (x^2 + x + 1)\, p(x)$$

a) P.D.Q. T es lineal.

En efecto: Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $p, q \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ cualesquiera.

$$T[\lambda_1 p + \lambda_2 q](x) \overset{\text{Def. de } T}{=} (x^2+x+1)(\lambda_1 p(x) + \lambda_2 q(x))$$
$$= \lambda_1 (x^2+x+1) p(x) + \lambda_2 (x^2+x+1) q(x)$$
$$= \lambda_1 T[p](x) + \lambda_2 T[q](x).$$

Luego, T es lineal.

b) Para encontrar una base de Ker T, encontremos un generador primero:

Sea $p \in \operatorname{Ker} T$ así: $T[p](x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \quad (x^2+x+1)\, p(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Luego la única opción es que $p \equiv 0$.

Luego $\operatorname{Ker} T \subseteq \{0\} \Rightarrow \operatorname{Ker} T = \{0\}$

Buscando un generador, nos encontramos con la base directamente: $\{0\}$.

Luego $\dim(\text{Ker } T) = 0$.

c)

Vemos por T.N.I. que:

$$\dim \mathbb{P}_2 = \dim(\text{Ker } T) + \dim(\text{Im } T)$$

$\Leftrightarrow \quad 3 = 0 + \dim(\text{Im } T)$

$\Leftrightarrow \quad \dim(\text{Im } T) = 3$

$\therefore$ la base tiene 3 elementos.

Una base por ejemplo puede ser:

$$\{ \underbrace{x^2(x^2+x+1)}_{T[x^2](x)}, \underbrace{x(x^2+x+1)}_{T[x](x)}, \underbrace{(x^2+x+1)}_{T[1](x)} \}$$

En efecto, como son polinomios de distinto grado son l.i., además los 3 están en Im T pues $T[x^2], T[x], T[1] \in \text{Im } T$. Luego como $\dim \text{Im } T = 3$, es base.

d)
- Como $\text{Ker } T = \{0\}$, T es inyectiva
- Como $\dim \text{Im } T = 3 < 5 = \dim \mathbb{P}_4$, T no es epiyectiva.

Ver Resumen!

- Como T no es epiyectiva, no es biyectiva, y por ende no es isomorfismo

Pauta Auxiliar 8

P3

- $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

(1) • $T\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$

(2) • $\text{Ker } T = \text{Im } T$

$\Bigg\}$ Hipotesis

• Encontrar T explicitamente

Este tipo de problemas tiene muchas maneras de hacerse. Pero la idea es siempre tratar de irse por la más facil. (o al menos una corta).

Una manera de partir siempre es descomponiendo T en función de los vectores canonicos:

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \underset{\substack{\downarrow \\ T \text{ es lineal}}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i\, T(e_i) \quad \left(= x_1 T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + x_2 T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \dots + x_4 T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right)$$

Ahora, usemos las hipotesis para así encontrar los valores de $T(e_i)$, si encontramos estos ya tendremos a T explicitamente.

Usando la primera ec. de (1):

$$\cdot\ T\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = 1\cdot T(e_1) + 1\cdot T(e_2) \overset{(1)}{=} \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} \qquad (3)$$

- $T\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = 1\cdot T(e_1) + 1\cdot T(e_3) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ (4)

Tenemos solo 2 ecuaciones ((3) y (4)) pero 4 incognitas ($T(e_1), \dots, T(e_4)$) $\therefore$ faltan ecuaciones.

En particular por (1) sabemos que $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \in \operatorname{Im} T$.

Pero por (2) $\operatorname{Im} T = \operatorname{Ker} T$.

Así: $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} T$.

Así:

- $T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad$ - $T\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $T(e_2) - T(e\ .) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \wedge T(e_1) + T(e_2) + T(e_3) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

LD (5) $\qquad$ LD (6)

Juntando (3), (4), (5) y (6):

$$\begin{cases} T(e_1) + T(e_2) + 0 + 0 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} & (3)\\ T(e_1) + 0 + T(e_3) + 0 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} & (4)\\ 0 + T(e_2) + 0 - T(e_4) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} & (5)\\ T(e_1) + T(e_2) + T(e_3) + 0 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} & (6) \end{cases}$$

Podemos resolverlo matricialmente, pero en este caso no es necesario:

Haciendo (6) - (3):

- $T(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Usando esto en (4):

- $T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Usando esto en (3):

- $T(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Usando esto en (5):

$T(e_4) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Así: $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Matriz representante } 😮 \text{!}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Pauta Auxiliar 8

P4

$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

- $T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\beta\\ \alpha\\ 0\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \alpha\\ \beta\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta\\ \alpha-1\\ 0\end{pmatrix}$

a) Encontrar los valores de α y β t.q. T no sea inyectiva.

Encontremos los valores para que T sea inyectiva.
Primero, pues ser inyectiva es mucho más específico.

Supongamos T inyectiva.

Como T es inyectiva $\{u_i\}_{i=1}^3$ es l.i $\Rightarrow \{T(u_i)\}_{i=1}^3$ es l.i.

en particular: Notar que $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

es l.i. (trivial).

Luego $\left\{T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ es l.i.

$\Leftrightarrow \left\{\begin{pmatrix}2\beta\\ \alpha\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ \alpha\\ \beta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\beta\\ \alpha-1\\ 0\end{pmatrix}\right\}$ es l.i.

Luego, el sistema

$$\begin{pmatrix}2\beta\\ \alpha\\ 0\end{pmatrix}\lambda_1 + \begin{pmatrix}0\\ \alpha\\ \beta\end{pmatrix}\lambda_2 + \begin{pmatrix}\beta\\ \alpha-1\\ 0\end{pmatrix}\lambda_3 = 0$$

tiene solución única $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0)$

Una matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2\beta & \beta & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha-1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{array}\right) \quad (1)$$

(Uso esto por conveniencia)

La idea es escalonar e imponer condición de pivotes no nulos (pues hay solución única)

Para escalonar, hay que dividir en casos:

$\boxed{\beta = 0}$ Aquí:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha-1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

fila 1 y 3 nulas, luego no hay solución única

$\boxed{\beta \neq 0}$ Como $\beta \neq 0$ podemos escalonar (1):

$$\xrightarrow{E_{12}\left(-\frac{\alpha}{2\beta}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2\beta & \beta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{2}-1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{array}\right)$$

luego como pivotes no nulos:

$$\frac{\alpha}{2} \neq 1 \Rightarrow \alpha \neq 2$$

$\therefore$ T inyectiva $\Rightarrow$ $\beta \neq 0 \wedge \alpha \neq 2$

Así: $\beta = 0 \vee \alpha = 2 \Rightarrow$ T no es inyectiva.

b) Caso $\beta = 0 \wedge \alpha = 1$

Como $\beta = 0$, T no es inyectiva.

Notemos las ecuaciones del enunciado son:

- $T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ (1)

- $T\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ (2)

- $T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ (3)

Luego $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} T$ y $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \in \operatorname{Im} T$.

Además restando (1) y (2):

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - T\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$ Pero T es lineal:

$$T\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} T$$

así:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \operatorname{Ker} T \quad \wedge \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \operatorname{Im} T$$

es l.i. es l.i.

así: • $\dim \operatorname{Ker} T \geq 2$ y • $\dim \operatorname{Im} T \geq 1$

Pero por T.N.I.:

$$3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T$$

$$\Rightarrow \quad \dim \operatorname{Ker} T = 3 - \dim \operatorname{Im} T$$

$$\leq 3 - 1 = 2$$

luego $\dim \operatorname{Ker} T = 2 \wedge \dim \operatorname{Im} T = 1$

así:

- $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es base de $\operatorname{Ker} T$ pues es l.i. y $\dim \operatorname{Ker} T = 2$

- $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es base de $\operatorname{Im} T$ pues es l.i. y $\dim \operatorname{Im} T = 1$

Auxiliar 8 Pauta

P5] $T : M_{22} \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a-b \\ b-c \\ c-d \\ d-a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b \\ c \\ d \\ a \end{bmatrix}$$

a) P.D.Q. T es lineal.

En efecto: Notar que $T_1\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$

y $T_2\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \\ d \\ a \end{bmatrix}$ son evidentemente

lineales, luego como $T = T_1 - T_2$, T es lineal pues suma/resta de lineales es lineal.

* Otra manera de verlo es con la propiedad compacta.

b) • Encontremos una base del Ker:

↳ Para eso, primero encontremos un generador.

Sea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} T$, luego $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \\ d \\ a \end{bmatrix} \Rightarrow a = b = c = d$$

$\therefore \quad \operatorname{Ker} T \subseteq \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

y como $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} T$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base de $\operatorname{Ker} T$.

$\therefore \dim \operatorname{Ker} T = 1$

- Para $\operatorname{Im} T$, usemos T.N.I. :

$\dim M_{22} = \dim(\operatorname{Ker} T) + \dim(\operatorname{Im} T)$

$\Leftrightarrow \quad 4 = 1 + \dim(\operatorname{Im} T)$

$\Leftrightarrow \quad \dim(\operatorname{Im} T) = 3$

$\therefore$ las bases de $\operatorname{Im} T$ tienen 3 elementos

Busquemos 3 elementos l.i. para concluir:

- $T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

- $T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Claramente l.i.:

$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$ (fila 4)

$\lambda_2 = 0$ (fila 1)

$\lambda_3 = 0$ (fila 3)

$$\therefore \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es base de $\operatorname{Im} T$, pues es l. i. y $\dim \operatorname{Im} T = 3$ //

c) • T no es inyectiva pues $\operatorname{Ker} T \neq \{0\}$

• Como $\dim M_{22} = \dim \mathbb{R}^4$ se tiene que:

T inyectiva $\Leftrightarrow$ T epiyectiva

$\therefore$ T no es epiyectiva.

d) Para encontrar la matriz representante de T c/R a las bases de B y C, hay que evaluar T en los elementos de B y escribirlo como combinación lineal de los elementos de C:

$$\bullet\ T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = ?_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + ?_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + ?_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + ?_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

¿Como hallamos los coeficientes? dos opciones

• Resolver el sistema matricial asociado

• Verlo al ojo:

$?_4 = 1$ pues solo de $?_4$ depende el ultimo coef de $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \boxed{-1} \end{pmatrix}$

$?_3 = 0$ ← identicas razones

$?_2 = -2$ pues $1 = ?_2 \cdot (-1) - 1$

$?_1 = 1$ pues $0 = ?_1 \cdot 1 + (-2) + 1$

1) $\cdot\ T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Para los demás:

2). $T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

3). $T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

4). $T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-4)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Luego, la matriz representante será:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

Columna 1 contiene coef. asociados a $T(B_1) = T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Cada columna tiene asociado los coeficientes de 1), 2), 3) y 4)