**MA1102-3: Álgebra Lineal**
**Profesor:** Jaime San Martín
**Auxiliar:** Felipe Hernández Castro

# Auxiliar 8 - Transformaciones Lineales

12 de noviembre de 2018

**Resumen**

- [**Transformación lineal**]: Sean $U$ y $V$ e.v's , llamaremos transformación lineal a toda función $T : U \longrightarrow V$ tal que:
  1. $\forall u_1, u_2 \in U, T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$
  2. $\forall u \in U, \lambda \in K, T(\lambda u) = \lambda T(u)$
- [**Propiedades elementales**]:
  1. $T(0) = 0$
  2. $T(-u) = -T(u)$
  3. $T$ es lineal si y solo si $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K$, $\forall u_1, u_2 \in U$.
  $$T(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 T(u_1) + \lambda_2 T(u_2)$$
- [**Kernel**]: Sea $T : U \longrightarrow V$ lineal. Se define el Kernel o Nucleo de $T$ como:
  $$KerT = \{x \in U | T(x) = 0\}$$
  **Observación:** $KerT$ es un s.e.v. de U, llamaremos nulidad a $dim(KerT)$.
- [**Imagen**]: Sea $T : U \longrightarrow V$ lineal. Se define la imagen de $T$ como:
  $$ImT = \{v \in V | \exists u \in U, T(u) = v\} = T(U)$$
  **Observación:** $ImT$ es un s.e.v. de V, llamaremos rango a $dim(ImT)$.
- [**Biyectividad de** $T$]: Sea $T : U \longrightarrow V$ lineal.
  1. $T$ es inyectiva si y sólo si $KerT = \{0\}$
  2. $T$ es isomorfismo si y sólo si $KerT = \{0\}$ y $ImT = V$ o equivalentemente $dim\ ImT = dim\ V$ y $dim\ KerT = 0$
  3. Si $T$ es inyectiva entonces $\{u_i\}_{i=1}^k$ es l.i. $\Rightarrow$ $\{T(u_i)\}_{i=1}^k$ es l.i.
- [**TNI**]: Sean $U, V$ e.v's, y $T : U \longrightarrow V$ lineal, tal que $dim\ U < \infty$. Entonces:
  $$dim\ U = dim\ KerT + dim\ ImT$$
- [**Teoremas de inyectividad y epiyectividad**]: Sea $T : U \longrightarrow V$ lineal.
  1. Si $dim\ U = dim\ V$ entonces $T$ inyectiva $\Leftrightarrow$ $T$ epiyectiva.
  2. Si $dim\ U > dim\ V$ entonces $T$ no es inyectiva.
  3. Si $dim\ U < dim\ V$ entonces $T$ no es epiyectiva.
  4. $U \cong V \Leftrightarrow dim\ U = dim\ V$.

**P1.** *a*) Sean $T : U \longrightarrow V$ y $L : V \longrightarrow W$ lineales, probar que $L \circ T : U \longrightarrow W$ es lineal.

*b*) Sea $T : U \longrightarrow V$ lineal y biyectiva, probar que $T^{-1} : V \longrightarrow U$ es lineal.

*c*) Sea $T : U \longrightarrow U$ lineal. Demuestre que:

1) $T \circ T = 0 \Leftrightarrow ImT \subseteq KerT$
2) $T \circ T = T \Rightarrow U = ImT \oplus KerT$
3) $ImT = KerT \Leftrightarrow dim\ U = 2dim(KerT)$ y $ImT \subseteq KerT$

**P2.** Considere la aplicación $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ definida por:

$$T[p](x) = (x^2 + x + 1)p(x)$$

*a*) Demuestre que $T$ es lineal.

*b*) Encuentre una base y la dimensión de $KerT$.

*c*) Determine una base de $ImT$ y calcule el rango de $T$.

*d*) Estudie posible inyectividad y epiyectividad de $T$. Estudie además si $T$ es isomorfismo.

**P3.** Sea $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ una transformación lineal tal que:

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} \text{ y } T\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Dé una expresión para $T$ sabiendo que $KerT = ImT$.

**P4.** Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que:

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\beta\\\alpha\\0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\alpha\\\beta\end{pmatrix} \text{ y } T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta\\\alpha-1\\0\end{pmatrix}$$

*a*) Encuentre los valores de $\alpha$ y $\beta$ tal que $T$ no sea inyectiva.

*b*) Encuentre una base y la dimensión de $KerT$ e $ImT$ para el caso $\alpha = 1$ y $\beta = 0$.

**P5.** Sea $T : \mathcal{M}_{22} \longrightarrow \mathbb{R}^4$ una transformación definida por:

$$T\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a-b\\b-c\\c-d\\d-a\end{pmatrix}$$

*a*) Pruebe que $T$ es lineal.

*b*) Calcule una base y la dimensión de $KerT$ y $ImT$.

*c*) Estudie la inyectividad y sobreyectividad de $T$.

*d*) Considere las bases respectivas para $\mathcal{M}_{22}$ y $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\right\} \text{ y } \mathcal{C} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

Calcule la matriz representante de $T$ con respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$.