Pauta Auxiliar 7

P1

Metodo 1

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

- El metodo consiste en crear una sucesión de conjuntos M_i encajonados, de manera que $M_i \subseteq M$ y M_i es l.i., hasta que $\langle M_i \rangle = \langle M \rangle$, es decir, M_i genere $\langle M \rangle$

Partamos:

$\boxed{i=1}$ $M_1 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{} \right\}$

Por ejemplo, pueden tomar cualquiera

→ $M_1 \subseteq M$ y M_1 es evidentemente l.i.,

Pero M_1 aun no genera $\langle M \rangle$ (basta ver que $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ no se puede escribir en función de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$)

$\boxed{i=2}$ agregamos $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$:

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

→ $M_2 \subseteq M$ y M_2 es l.i. por lo ya dicho.

¿ M_2 genera $\langle M \rangle$?

Veamos:

Scanned by CamScanner

Debemos ver si los vectores de M se pueden escribir con los de M_2:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[f_3' = f_3 + f_1]{f_2' = f_2 - f_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \text{fila 2 y 3 incompatibles}$$

$\therefore$ no hay solución.

Luego $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ no se puede generar de M_2.

$\boxed{i=3}$ por el desarrollo anterior, agregamos $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$:

$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\rightarrow$ l.i. por el desarrollo anterior.

$\rightarrow$ $M_3 \subseteq M$

$\rightarrow$ M_3 genera $\langle M \rangle$ pues $\text{Card } M_3 = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \geq \dim \langle M \rangle > 2$

$\therefore$ M_3 es el conjunto buscado

P1

Metodo 2

$$P = \{ (2x^2+5x+2), (x^2+6), (3x^2-12), (4x+1) \}$$

· El metodo consiste en partir de P, y generar una sucesión de conjuntos P_i encajonados tal que P_i genere $\langle P \rangle$, hasta que P_i sea l.i.

i=1 Entonces, queremos quitar de P algun vector que pueda ser generado con los demas.

Aqui, podemos tener buena intuición y adivinar cual es y como se escribe en función de los demás, o la otra opción es establecer el sistema:

$$\lambda_1 (2x^2+5x+2) + \lambda_2 (x^2+6) + \lambda_3 (3x^2-12) + \lambda_4 (4x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2(2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3) + x(5\lambda_1 + 4\lambda_4) + (2\lambda_1 + 6\lambda_2 - 12\lambda_3 + \lambda_4)$$

$$= 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por igualdad de polinomios:

$$(*) \quad \left.\begin{aligned} 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ 5\lambda_1 + 4\lambda_4 &= 0 \\ 2\lambda_1 + 6\lambda_2 - 12\lambda_3 + \lambda_4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

ahora, podemos ir resolviendo.

Veamos - por ejemplo - si $(2x^2+5x+2)$ se puede escribir en función de los demás. Para eso imponemos $\lambda_1 = 1$.
Tendríamos que:

$$\begin{cases} 2 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_4 = -5 \\ 2 + 6\lambda_2 - 12\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

Antes de escalonar el sistema, notemos que $\lambda_4 = -\frac{5}{4}$:

$$\begin{cases} \lambda_2 + 3\lambda_3 = -2 \\ 6\lambda_2 - 12\lambda_3 = -2 + \frac{5}{4} = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -2 \\ 6 & -12 & -\frac{3}{4} \end{array}\right] \longrightarrow \underbrace{\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -30 & -\frac{3}{4}+12 \end{array}\right]}$$

pivotes $\neq 0$ $\therefore$ tiene solución.

Luego, $(2x^2+5x+2)$ se puede escribir en función de los demás.

$\boxed{(i=2)}$ Tenemos $P_2 = \{(x^2+6), (3x^2-12), (4x+1)\}$
Volvemos al sistema (*), pero como no nos interesa $(2x^2+5x+2)$, imponemos $\lambda_1 = 0$

Scanned by CamScanner

así:

$$\begin{cases} \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_4 = 0 \\ 6\lambda_2 - 12\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

por fila 2: $\lambda_4 = 0$, luego:

$$\begin{cases} \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 6\lambda_2 - 12\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

haciendo: $f_2' = f_2 - 6f_1$

$$\begin{cases} \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 0 - 30\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Luego $\lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$

$\therefore$ P_2 es l.i., y por construcción genera $\langle P \rangle$.

Scanned by CamScanner

Control Auxiliar 7

P2)

L : recta

Π_1 y Π_2 : planos

a) • Como L es recta y pasa por O, $\exists d \in \mathbb{R}^3$ t.q. $L: \lambda d$

Luego evidentemente $\{d\}$ es base de L.

• Si Π es un plano en general, $\exists d_1, d_2 \in \mathbb{R}^3$ t.q.

$\Pi: \underset{\substack{\uparrow \\ O \text{ como vector posición}}}{\lambda} d_1 + \mu d_2$ Luego $\{d_1, d_2\}$ será base

∴ Deducimos que:

- $\dim L = 1$
- $\dim \Pi_1 = \dim \Pi_2 = 2$

Nota que:

$$\dim L + \Pi_1 = \dim L + \dim \Pi_1 - \dim L \cap \Pi_1$$

$$= 1 + 2 - \dim L \cap \Pi_1 = 3 - \dim L \cap \Pi_1$$

Además $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

• Por ende, necesariamente para que $\mathbb{R}^3 = L + \Pi_1$, hay que pedir $L \cap \Pi_1 = \{0\}$

Luego si $\left[L \cap \Pi_1 = \{0\} \right]$ se tiene que $\dim L \ \Pi_1 = \dim \mathbb{R}^3$

y como $L + \Pi_1$ es s.e.v. de $\mathbb{R}^3$, entonces:

$$L + \Pi_1 = \mathbb{R}^3$$

b) Por otro lado:

$$\dim \Pi_1 + \Pi_2 = \overbrace{\dim \Pi_1}^{2} + \overbrace{\dim \Pi_2}^{2} - \dim \Pi_1 \cap \Pi_2$$

$$= 4 - \dim \Pi_1 \cap \Pi_2$$

$\therefore$ Se debe imponer $\dim \Pi_1 \cap \Pi_2 = 1$

Así $\dim \Pi_1 + \Pi_2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ y como es s.e.v.

$$\Pi_1 + \Pi_2 = \mathbb{R}^3$$

Observación: $\dim \Pi_1 \cap \Pi_2 = 1 \Rightarrow \Pi_1 \cap \Pi_2$ es una recta pues

$$\Pi_1 \cap \Pi_2 = \langle d^* \rangle \quad \text{con } d^* \text{ algun vector}$$

c) Pregunta: ¿Puede ser suma directa?

a) en esta parte, teniamos que $L + \Pi_1 = \mathbb{R}^3$ con la condición $L \cap \Pi_1 = \{0\}$, luego es suma directa, o sea:

$$L \oplus \Pi_1 = \mathbb{R}^3$$

Scanned by CamScanner

b| En este caso $\Pi_1 \cap \Pi_2$ era una recta, luego $\dim \Pi_1 \cap \Pi_2 = 1$ además de que $\Pi_1 \cap \Pi_2 \neq \emptyset$. Luego, no es suma directa

¿Que ocurre si cambiamos $\mathbb{R}^3$ por $\mathbb{R}^4$?

a) $L + \Pi_1 \neq \mathbb{R}^4$ pues $\dim L + \Pi_1 \leq 3 < 4 = \dim \mathbb{R}^4$.

$\therefore$ no ocurre mismo a)

b) En este caso, puede ocurrir que $\mathbb{R}^4 = \Pi_1 + \Pi_2$, siempre y cuando esta sea suma directa (pues así $\dim \Pi_1 \cap \Pi_2 = 0$).

Scanned by CamScanner

Pauta Auxiliar 7

P3)

<u>P.D.Q.</u> $V \oplus \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$

En efecto:

Recordemos que $V = \{ p \in \mathbb{P}_3 \mid p(x) = f(x)(x^2+5) \}$

Para ver que $\mathbb{P}_1 \oplus V = \mathbb{P}_3$ usemos la caracterización:

$\Leftrightarrow (\mathbb{P}_1 + V = \mathbb{P}_3 \wedge \mathbb{P}_1 \cap V = \{0\})$

$\boxed{\mathbb{P}_1 \cap V = \{0\}}$ En efecto:

$\subseteq$)

$\mathbb{P}_1 \cap V \subseteq \{0\}$ pues si tomamos $p \in \mathbb{P}_1 \cap V$

Como $p \in \mathbb{P}_1$ tiene grado a lo más 1, pero como $p \in V$ si suponemos $f \neq 0$, entonces p tiene grado 2 o 3 $\rightarrow\!\leftarrow$.

Luego el único caso factible es cuando $f \equiv 0$

$\Rightarrow p \equiv 0$

$\therefore \mathbb{P}_1 \cap V \subseteq \{0\}$

$\supseteq$) $\{0\} \subseteq \mathbb{P}_1 \cap V$ por ser s.e.v.'s.

Scanned by CamScanner

$\boxed{\mathbb{P}_1 + V = \mathbb{P}_3}$ En efecto

- $\mathbb{P}_1 + V$ es s.e.v. de $\mathbb{P}_3$
- Además $\dim \mathbb{P}_1 + V = \dim \mathbb{P}_1 + \dim V - \dim \mathbb{P}_1 \cap V$

$$= 2 + 2 - 0$$

$$= 4$$

$$= \dim \mathbb{P}_3$$

$\therefore$ $\mathbb{P}_1 + V = \mathbb{P}_3$ pues $\mathbb{P}_1 + V$ es s.e.v. de $\mathbb{P}_3$

y $\dim \mathbb{P}_1 + V = \dim \mathbb{P}_3$

La propiedad auxiliar pasado (ver resumen)

Scanned by CamScanner

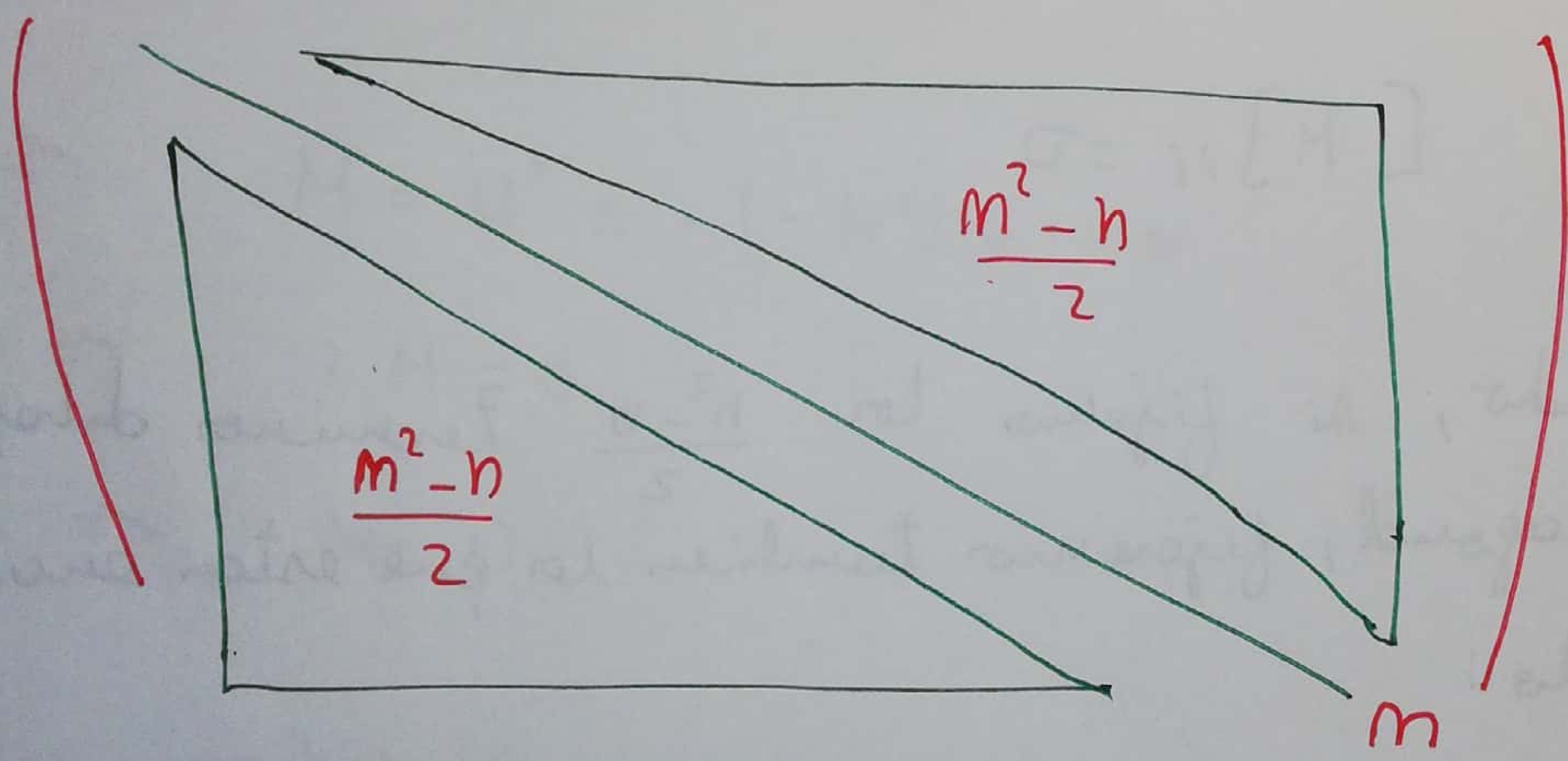
Pauta Auxiliar 7

P4

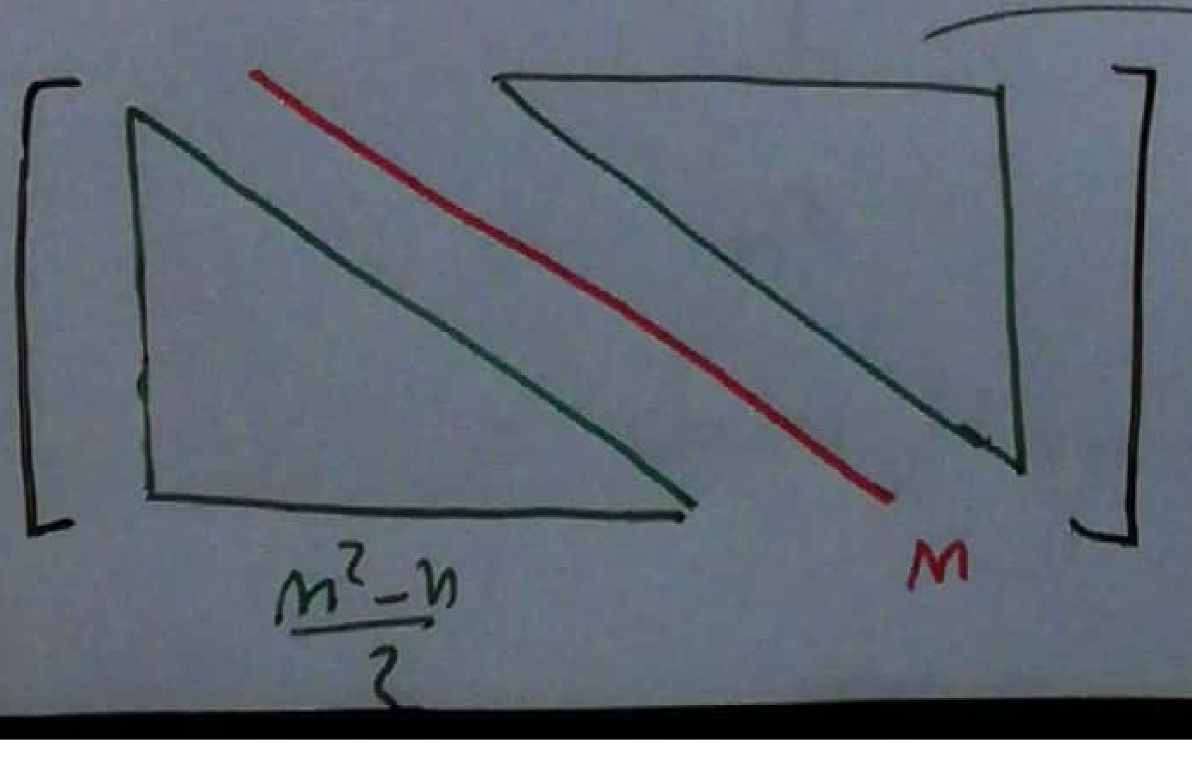
$$S = \{ M \in \mathcal{M}_{nn} \mid M \text{ es simétrica} \}$$

$$A = \{ M \in \mathcal{M}_{nn} \mid M \text{ es antisimétrica} \}$$

a) Como estamos en las matrices de $n \times n$, las matrices tienen n^2 coordenadas, en donde n son las que conforman la diagonal y $\frac{(n^2-n)}{2}$ están por debajo de la diagonal, mientras que $\frac{n^2-n}{2}$ están por sobre:



dim S Notar que toda matriz simétrica tiene n grados de libertad por parte de la diagonal y solo $\frac{n^2-n}{2}$ grados de libertad de los bloques triangulares inferiores y superior, pues estos se corresponden (si yo fijo uno, el otro queda determinado:



queda determinado por los $\frac{n^2-n}{2}$ inferiores

Por ende solo necesito fijar $\left(\frac{n^2-n}{2}+n\right)$ coordenadas para dejar la matriz totalmente definida.

$\therefore$ intuimos $\dim S = \frac{n^2-n}{2} + n$

dim A | Notemos que si $M \in A$ entonces su diagonal esta determinada y son puros 0's, esto pues:

$M = -M^t$ (ante la traspuesta la diagonal no es afectada)

$$\Rightarrow [M]_{ii} = [-M^t]_{ii} = -[M]_{ii}$$

$$\Rightarrow [M]_{ii} = 0$$

Por otro lado, si fijamos los $\frac{n^2-n}{2}$ terminos debajo de la diagonal, fijaremos tambien los que estan encima, en efecto:

$$[M]_{ij} = [-M^t]_{ij} = -[M]_{ji}$$

$\therefore$ solo hay $\frac{n^2-n}{2}$ grados de libertad.

Así:

$$\dim A = \frac{n^2-n}{2}$$

Scanned by CamScanner

b) Hay que ver que $M_{nn} = S \oplus A$

En efecto

$\boxed{S \cap A = \{0\}}$

$\supseteq$ $\{0\} \subseteq S \cap A$ evidentemente

$\subseteq$ Sea $M \in S \cap A$, luego:

$$M^t = M \quad \wedge \quad -M^t = M$$

$$\Rightarrow \quad M = M^t = -(-M^t) = -M$$

$$\Rightarrow \quad 2M = 0$$

$$\Rightarrow \quad M = 0$$

$\boxed{M_{nn} = S + A}$

- $S + A$ es s.e.v. de M_{nn}
- $\dim S + A = \dim M_{nn}$, en efecto:

$$\dim S + A = \dim S + \dim A - \dim S \cap A$$

$$= \frac{n^2 - n}{2} + n + \frac{n^2 - n}{2} - 0$$

$$= n^2$$

$$= \dim M_{nn}$$

Scanned by CamScanner

Luego como $S+A$ es s.e.v. de M_{nn} y

$\dim S+A = \dim M_{nn}$, se tiene que $M_{nn} = S+A$

Luego $M_{nn} = S \oplus A$

Scanned by CamScanner

Pauta Auxiliar 7

P5) $F = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$F_p = \{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es par} \}$

$F_i = \{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es impar} \}$

a)

Para F_p: (hay que ver las 3 condiciones)

- $f(x) = 0$ la función nula evidentemente es par

$\Rightarrow f \in F_p$

- $F_p \subseteq F$ por def
- $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f_1, f_2 \in F_p$, P.D.Q. $\alpha f_1 + f_2 \in F_p$

en efecto:

$$(\alpha f_1 + f_2)(x) = \alpha f_1(x) + f_2(x)$$

$$f_1, f_2 \in F_p \Leftarrow = \alpha f_1(-x) + f_2(-x)$$

$$= (\alpha f_1 + f_2)(-x)$$

$\therefore \alpha f_1 + f_2 \in F_p$

Luego F_p es s.e.v.

Para F_i es totalmente homologo.

b) P.D.Q. $F = F_p \oplus F_i$

En efecto:

$F_p \cap F_i = \{0\}$ $\subseteq$) Sea $f \in F_p \cap F_i$.

Luego $f(x) = f(-x) \ \wedge \ -f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Scanned by CamScanner

$\Rightarrow \quad f(x) = -f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad 2f(x) = 0$

$\Rightarrow \quad f(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$

2) Evidente pues son s.e.v.'s.

$F_p + F_i = F$ En efecto:

$F_p + F_i$ es s.e.v. de F (luego $F_p + F_i \subseteq F$)

¿ podemos ver que $\dim F_p + F_i = \dim F$?

NO! pues F tiene dimensión infinita!!

debemos verlo por definición.

basta ver que $F \subseteq F_p + F_i$ pues la otra inclusión se tiene. Sea $f \in F$

Consideremos $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

h es evidentemente par.

Veamos que $g = f - h$ es impar:

$$g(x) = f(x) - h(x) = f(x) - \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

$$= \frac{f(x) - f(-x)}{2} = -\left(\frac{f(-x) - f(x)}{2}\right) = -g(-x)$$

Scanned by CamScanner

$\therefore$ g es impar.

Luego $f = h + g \Rightarrow f \in F_p + F_i$.

Concluimos así que $F_p + F_i = F$.

Luego $F_p \oplus F_i = F$.

Anexo ¿porque $h(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$?

para encontrar h, imponemos que f se puede escribir como una función par más una impar:

- $f(x) = h(x) + g(x)$ (1)

Además:

- $\underbrace{f(-x)}_{}$ $= h(-x) + g(-x) = h(x) - g(x)$ (2)

la idea de calcular esto es usar la paridad e imparidad

Luego sumando (1) + (2):

$$f(x) + f(-x) = 2h(x)$$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

Scanned by CamScanner