MA1102-3: Álgebra Lineal
Profesor: Jaime San Martín
Auxiliar: Felipe Hernández Castro

Auxiliar 7 - Suma de Espacios Vectoriales

5 de noviembre de 2018

Resumen

- **[Suma de espacios vectoriales]**: Sean U, W s.e.v. de V, se define:

$$U + W = \{v \in V | v = u + w, u \in U, w \in W\}.$$

Observación: $U + W$ es s.e.v. de V.

- **[Suma Directa]**: Sean U, W s.e.v. de V, diremos que $Z = U + W$ es suma directa de U y W, denotando $U \oplus W = Z$ si $\forall v \in Z$ se escribe de manera unica como :

$$v = u + w, \quad u \in U, w \in W.$$

- **[Caracterización de la suma directa]**: Dado V e.v. y U, W, Z s.e.v. de V, entonces:

$$U \oplus W = Z \Leftrightarrow (Z = U + W) \wedge (U \cap W = \{0\})$$

- **[Dim de la suma directa]**: Sea V de dimensión finita.

  1. Si $V = U \oplus W$ y V, entonces $dim\ V = dim\ U + dim\ W$
  2. Si $V = U + W$ y V, entonces $dim\ V = dim\ U + dim\ W - dim\ U \cap W$

P1. Considere los siguientes conjuntos de vectores en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^3$:

$$P = \{(2x^2 + 5x + 2), (x^2 + 6), (3x^2 - 12), (4x + 1)\}, \quad M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Entre un subconjunto B de tamaño máximo de elementos linealmente independientes en cada caso.

P2. Considere una recta L y dos planos Π_1 y Π_2 que pasan por el origen, en $\mathbb{R}^3$. Encuentre las condiciones para que ocurra que:

a) $\mathbb{R}^3 = L + \Pi_1$
b) $\mathbb{R}^3 = \Pi_1 + \Pi_2$

En los casos anteriores: ¿Puede ser una suma directa?, ¿Que ocurre si intercambiamos $\mathbb{R}^3$ por $\mathbb{R}^4$? Justifique.

P3. Consideremos el conjunto:

$$V = \{p(x) \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) | p(x) = q(x)(x^2 + 5), \text{ para algún polinomio a coef. reales } q(x)\}$$

En la clase pasada, demostramos que V era un s.e.v. de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ y que $dim\ V = 2$. Pruebe ahora que $V \oplus \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

P4. Consideremos en $\mathcal{M}_{nn}$ los siguientes s.e.v. :

$$\mathcal{S} = \{M \in \mathcal{M}_{nn} | M \text{ es simétrica}\} \quad \mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M}_{nn} | M \text{ es antisimetrica}\}$$

(Recordar que M es antisimetrica si $M = -M^t$)

a) Sin encontrar una base, calcule intuitivamente $dim\ \mathcal{S}$ y $dim\ \mathcal{A}$.

b) Demuestre que toda matriz cuadrada puede escribirse de forma única como suma de una matriz simétrica y una antisimetrica.

P5. Considere el espacio vectorial $F = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y los subconjuntos $F_p = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} | f(x) = f(-x)\}$ y $F_i = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} | f(x) = -f(-x)\}$. Demuestre que:

a) F_p, F_i son s.e.v.'s de F.

b) $F = F_p \oplus F_i$.