

## Punto Auxiliar 6

P1  $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$

a) P.D.Q.  $A$  es invertible  $\Leftrightarrow$  las columnas de  $A$  son l.i.

En efecto:

Recordar:  $A$  es invertible  $\Leftrightarrow Ax=0$  tiene solución única  $(x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix})$

Pero usando notación por columnas:

$$Ax = [A_{\bullet 1} \ A_{\bullet 2} \ \dots \ A_{\bullet n}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= x_1 \cdot A_{\bullet 1} + x_2 A_{\bullet 2} + \dots + x_n A_{\bullet n} = 0$$

$Ax=0$

Luego, los únicos escalares  $\{x_1, \dots, x_n\}$  que cumplen esto son  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ .

Luego  $\{A_{\bullet 1}, A_{\bullet 2}, \dots, A_{\bullet n}\}$  es l.i.



b)

$\Rightarrow$  En particular si  $A$  es invertible, entonces  $\{A_{\bullet 1}, \dots, A_{\bullet n}\}$  es l.i. y como tal conjunto tiene  $n$  elementos, y  $\dim \mathbb{R}^n = n$ , concluimos que es base.

$\Leftarrow$  Si es base en particular es l.i.

$\therefore A$  invertible  $\Leftrightarrow$  sus Columnas son base de  $\mathbb{R}^n$

*¿Que ocurre con las filas?*

Nota que:

Columnas de  $A$  son base de  $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow A$  es invertible

$\Leftrightarrow A^t$  es invertible

$\Leftrightarrow$  filas de  $A$  son base de  $\mathbb{R}^n$



Pues las columnas de  $A^t$  son las filas de  $A$ .



## Punto Auxiliar 6

P2

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \\ \beta \\ -\alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

a) P.D.Q.  $V$  es s.e.v. de  $\mathbb{R}^4$ .

En efecto:

•  $0 \in V$  evidentemente para  $\alpha = \beta = 0 \therefore V \neq \emptyset$

•  $V \subseteq \mathbb{R}^4$  por definición.

• Sea  $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$  y  $v, w \in V$ . P.D.Q.  $\mu v + \lambda w \in V$

En efecto:

Como  $v, w \in V \Rightarrow \exists \alpha, \beta, \mu, \xi \in \mathbb{R}$  t. f.:

$$v = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \\ \beta \\ -\alpha \end{pmatrix} \wedge w = \begin{pmatrix} \mu \\ -\xi \\ \xi \\ -\mu \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mu v + \lambda w = \begin{bmatrix} \mu \alpha + \lambda \mu \\ -[\mu \beta + \lambda \xi] \\ \mu \beta + \lambda \xi \\ -[\mu \alpha + \lambda \mu] \end{bmatrix}$$

Reemplazando  $\bar{\alpha} = \mu \alpha + \lambda \mu$   $\wedge$   $\bar{\beta} = \mu \beta + \lambda \xi$

tenemos que  $\exists \bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathbb{R}$ , t. f.  $\mu v + \lambda w = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} \\ -\bar{\beta} \\ \bar{\beta} \\ -\bar{\alpha} \end{bmatrix}$



Luego  $\mu v + \lambda w \in V$ .

$\therefore V$  es s.e.v.

• Encuentra una base de  $V$ .

- Encuentremos un generador primero! , Notar que si  $v \in V$

entonces  $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \\ \beta \\ -\alpha \end{pmatrix}$  para algun  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Osi:

$$v = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall v \in V$$

$\therefore \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  genera  $V$  \* (pues  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V$ )

- Ademas es l.i. En efecto:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ -\lambda_2 \\ \lambda_2 \\ -\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Osi, como  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  es l.i. y genera  $V$ , es base de  $V$ .

Ademas  $\dim V = 2 \neq 4 = \dim \mathbb{R}^4 \therefore V \neq \mathbb{R}^4$ .



6) Hay varias opciones para completar base:

Opción 1 | Al ojo.

Queremos extender  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  a una base de  $\mathbb{R}^4$

$\therefore$  No faltan 2 vectores.

Al desarrollar un poco de intuición, podríamos postular

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  como vectores para completar la base.

Esta intuición procede de que:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Podemos escribir los vectores de la base canónica con los vectores del conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Luego, si podemos escribir la base canónica, es intuitivo que todos los demás vectores también.

☺☺☺: Esto es solo una intuición aún debemos ver que es base.



Mostrar que  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  es

base de  $\mathbb{R}^4$ .

En efecto

- l.i. Sean  $d_1, d_2, d_3, d_4 \in \mathbb{R}$  tales que:

$$d_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + d_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} d_1 \\ d_4 - d_2 \\ d_2 \\ d_3 - d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow d_1 = 0 \wedge d_4 = d_2 \wedge d_2 = 0 \wedge d_3 = d_1$$

$$\Leftrightarrow d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0$$

$\therefore B$  es l.i.

Juego como  $\text{Card } B = \dim \mathbb{R}^4$ ,  $B$  es base de  $\mathbb{R}^4$ .



## opción 2 Constructivamente.

Nota que si  $v \in \mathbb{R}^4$  entonces  $\exists v_1, \dots, v_4 \in \mathbb{R}$  e- f. :

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 + v_3 \\ 0 \\ v_4 + v_1 \end{pmatrix}$$

escribimos alguna combi-  
nación lineal con  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  y

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

compensamos con  
otros vectores convenientes.

$$= v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + [v_2 + v_3] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + [v_4 + v_1] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así esto, sumados a que  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

tenemos que  $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^4$

Además tiene cardinalidad 4 = dim  $\mathbb{R}^4$ .  
Luego es base de  $\mathbb{R}^4$ .



## Ponto Auxiliar 6

P3

$$V = \{ p(x) \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \mid p(x) = q(x)(x^2+5), \text{ para algum } q(x) \}$$

a)

•  $0 \in V$ , en efecto, tomando  $q(x)=0$ , se tendría que:

$$0(x) = 0 \cdot (x^2+5) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\therefore V \neq \emptyset$$

•  $V \subseteq \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$  por def. de  $V$

• Sean  $\mu, \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $p_1, p_2 \in V$ .

P.D.Q.  $[\mu p_1 + \alpha p_2] \in V$

En efecto: Como  $p_1, p_2 \in V$ , entonces  $\exists q_1, q_2$  tales que:

$$p_1(x) = q_1(x)(x^2+5)$$

$$p_2(x) = q_2(x)(x^2+5)$$

$$\text{luego } [\mu p_1 + \alpha p_2](x) = \mu p_1(x) + \alpha p_2(x)$$

$$= \mu q_1(x)(x^2+5) + \alpha q_2(x)(x^2+5)$$

$$= [\mu q_1 + \alpha q_2](x)(x^2+5)$$

$$\therefore \exists q = \mu q_1 + \alpha q_2 \in \mathbb{P}_1:$$

$$[\mu p_1 + \alpha p_2] = [\mu q_1 + \alpha q_2](x)(x^2+5)$$



$$\therefore [\mu p_1 + \lambda p_2] \in V$$

$\therefore V$  es s.o.v.

b) Sea  $p \in V$ . Luego  $\exists f$  t.f.:

$$p(x) = f(x)(x^2+5) = f(x)x^2 + 5f(x)$$

Pero adem6s ¿c6mo es  $f(x)$ ?

Como  $V \subseteq \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ ,  $p(x)$  es de grado 3 o menor,

luego  $f(x)$  es de grado 1 o menor. ( $f \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ )

Luego,  $\exists \lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$ , t.f.  $f(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x$ .

Or:

$$p(x) = (\lambda_0 + \lambda_1 x) \cdot (x^2 + 5) = \lambda_1 x^3 + \lambda_0 x^2 + 5\lambda_1 x + \lambda_0 \cdot 5$$

$$= \lambda_1 [x^3 + 5x] + \lambda_0 [x^2 + 5]$$

Luego - como adem6s  $[x^3 + 5x], [x^2 + 5] \in V$  -

tenemos que  $B = \{[x^3 + 5x], [x^2 + 5]\}$  genera  $V$ .

Veamos ahora que  $B$  es l.i.: Sean  $\lambda_1, \lambda_0 \in \mathbb{R}$  tales que:

$$\lambda_0 [x^2 + 5] + \lambda_1 [x^3 + 5x] = 0 \quad \begin{array}{l} \rightarrow (0(x), \text{polinomio nulo}) \\ \rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \text{ Igualdad de polinomios} \end{array}$$



$$\Rightarrow \lambda_1 x^3 + \lambda_0 x^2 + 5\lambda_1 x + 5\lambda_0 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Luego por igualdad de polinomios:

$$\lambda_1 = \lambda_0 = 0 \quad \therefore \text{es l.i. el conjunto } B.$$

Luego,  $B$  es base de  $V$

c) Como  $B$  es base de  $V$ ,  $\dim V = \text{card } B = 2$

d) P.D.A.  $V \oplus \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$

En efecto: Usamos la caracterización:

$$\begin{cases} 1) & \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) = V + \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \\ 2) & V \cap \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) = \{0\} \end{cases}$$

Es útil ver 2) primero:

2) Sea  $p \in V \cap \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \left( \exists f \in \mathbb{P}_1(x), f(x)(x^2+5) = p(x) \right) \wedge \left( p(x) \text{ es de grado } \leq 1. \right)$$

Si  $f(x) \neq 0$ ,  $p(x)$  sería a lo menos de grado 2, pero eso es una contradicción con que  $p \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \therefore f \equiv 0$

Orí  $p(x)$  tiene que ser el polinomio nulo.

La inclusión  $\{0\} \subseteq V \cap \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$  es evidente pues son s.e.v.



$$\therefore V \cap IP_1(\mathbb{R}) = \{0\}$$

obs  $\dim \{V \cap IP_1(\mathbb{R})\} = \text{card } \emptyset = 0$

1) Para ver 1) notamos que tanto  $V$  como  $IP_1(\mathbb{R})$  son s.e.v. de  $IP_3(\mathbb{R})$ , luego  $V + IP_1(\mathbb{R})$  también sera s.e.v. de  $IP_3(\mathbb{R})$ . Además:

$$\begin{aligned} \dim V + IP_1(\mathbb{R}) &= \dim V + \dim IP_1(\mathbb{R}) - \dim V \cap IP_1(\mathbb{R}) \\ &= 2 + 2 - 0 \\ &= 4 \\ &= \dim IP_3(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

$$\therefore IP_3(\mathbb{R}) = V + IP_1(\mathbb{R}). \quad (\text{ver [teoremas] punto 2. del resumen})$$

$$\text{Ent, } IP_3(\mathbb{R}) = V \oplus IP_1(\mathbb{R})$$



## Punto Auxiliar 6

P4)

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

- ¿Es l.d.? en efecto, basta ver que  $\dim \mathbb{R}^3 = 3$   
y  $\text{card } A = 4 > 3 \quad \therefore$  es l.d. pues un conjunto l.i. en  $\mathbb{R}^3$  tiene a lo más 3 elementos.

- Ahora para extraer un conjunto  $B$  que sea l.i. y maximal, construiremos subconjuntos  $B_i$  l.i., hasta que no se puedan agrandar:

$$\bullet B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{evidentemente l.i.}$$

Agregamos otro que sea l.i. con  $B_1$ , por ejemplo  $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ :

$$B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Es l.i. pues:

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$



Notar que ya no lo podemos seguir agregando, pues:

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \left\{ \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \text{ es l. d.} \right.$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \left\{ \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ es l. d.} \right.$$

$\therefore B_2$  es l.i. maximal.

Como  $\text{Card } B_2 = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^n$ ,  $B_2$  no es base.



## Punto Auxiliar 6

P5]

$$U = \{ p(x) \in P_3(\mathbb{R}) \mid p(1) = p'(1) = 0 \}$$

a) Para mostrar una base:

Sea  $p \in U$ , luego  $p(x) = a_0 + x a_1 + x^2 a_2 + x^3 a_3$

(pues  $U \subseteq P_3$ ) pero además  $p(1) = p'(1) = 0$ , sea:

$$p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \quad (1)$$

$$p'(1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \quad (2)$$

De las ecuaciones, podemos despejar por ende 2 variables:

$$a_1 = -2a_2 - 3a_3$$

por (2)

$$a_0 = -a_1 - a_2 - a_3 = 2a_2 + 3a_3 - a_2 - a_3$$

$$= a_2 + 2a_3$$

por (1)

Luego:

$$p(x) = (a_2 + 2a_3) + [-2a_2 - 3a_3]x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$= a_2 [1 - 2x + x^2] + a_3 [2 - 3x + x^3]$$

Luego por esto - y el hecho que  $p_1(x) = 1 - 2x + x^2$ ,  $p_2(x) = 2 - 3x + x^3$   
 $\in U$ , se tiene que  $\{p_1, p_2\}$  genera  $U$ .



Para que  $\{p_1, p_2\}$  en l.i., sean  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ :

$$\lambda_1 [1 - 2x + x^2] + \lambda_2 [2 - 3x + x^3] = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Igualdad de polinomios

$$\Leftrightarrow \lambda_2 x^3 + \lambda_1 x^2 + (-2\lambda_1 - 3\lambda_2)x + (\lambda_1 + 2\lambda_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_2 = \lambda_1 = 0$$

$\therefore \{p_1, p_2\}$  en l.i., y en base.

luego  $\dim U = \text{card} \{p_1, p_2\} = 2$ .

b) Nota que  $\dim P_3(\mathbb{R}) = 4 \therefore$  No faltar 2 integrantes de la base para completar  $\{p_1, p_2\}$

Recordar que  $p_1(x) = 1 - 2x + x^2$ ,  $p_2(x) = x^3 - 3x + 2$

Intentemos escribir la base canónica:

$$1 = (x^3 - 3x + 2) + 3x - 1 - x^3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Por ejemplo} \\ \text{identificamos } x \text{ y } 1 \text{ como candidatos} \end{array} \right.$$

$$x = x$$

$$x^2 = (x^2 - 2x + 1) - (-2x + 1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{suplen las} \\ \text{dimensiones} \\ \text{de } x \text{ y } 1 \end{array} \right.$$

$$x^3 = (x^3 - 3x + 2) + 3x - 2 \quad \nearrow$$



Orí, tenemos de candidatos  $p_3(x) = x$  y  $p_4(x) = 1$ .

Un manera de verlo es que  $p_1(x)$  contiene la dependencia de  $x^1$ , en cambio  $p_2(x)$  contiene la dependencia de  $x^3$ .

Veamos entonces que  $B = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$  es l.s.

Pero aquello, como  $\text{Card } B = 4 = \dim \mathbb{P}(\mathbb{R})$ , solo basta ver que genere o que es l.i.

Esto vez, vemos que genera:

P.D.Q.  $\langle B \rangle = \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$

en efecto: • Evidentemente  $B \subseteq \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ , luego

$$\langle B \rangle \subseteq \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$$

• Para ver que  $\mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \subseteq \langle B \rangle$ , sea  $p \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$  arbitrario, orí,  $p$  se escribe como:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3.$$

La idea es escribirlo en función de  $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ .

Para eso - como  $p_1$  y  $p_2$  tienen una forma más compleja - hagamos aparecer  $p_1$  y  $p_2$  primero:



- Para  $P_1$ , notar que este contiene la dependencia de  $x^2$ . Así:

$$a_2 x^2 = a_2 \underbrace{[x^2 - 2x + 1]}_{P_1(x)} + a_2 [2x - 1]$$

↓  
Ninguno  
Ninguno

- Para  $P_2$ , notar que este contiene la dependencia de  $x^3$ . Así:

$$a_3 x^3 = a_3 \underbrace{[x^3 - 3x + 2]}_{P_2(x)} + a_3 [3x - 2]$$

↓  
Ninguno  
Ninguno

luego,  $P$  se escribe como:

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1 x + a_3 [3x - 2] + a_2 [2x - 1] + a_3 P_2(x) + a_2 P_1(x) \\ &= \underbrace{[a_0 - 2a_3 - a_2]}_{\text{llamemoslo } C_1} + x \underbrace{[a_1 + 3a_3 + 2a_2]}_{\text{llamemoslo } C_2} + a_3 P_2(x) + a_2 P_1(x) \end{aligned}$$

↓  
agrupamos las constantes y las ponderaciones de  $x$

$$= C_1 \cdot P_4(x) + C_2 P_3(x) + a_2 P_1(x) + a_3 P_2(x)$$

∴  $P$  es combinación lineal de  $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$



entonces:  $\langle \{p_1, p_2, p_3, p_4\} \rangle = \langle B \rangle \geq \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$

Luego  $\langle B \rangle = \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$

y finalmente,  $B$  es base de  $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$

c)  $W = \{p(x) \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \mid p''(0) = 0\}$

1) Encontramos un generador primero:

Sea  $p \in W$ , como  $W \subseteq \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ ,  $p$  se escribe como:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Además, sabemos que  $p''(0) = 0$

$$\Rightarrow p'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$$

$$\Rightarrow p''(x) = 2a_2 + 6a_3 x$$

imponiendo  $p''(0) = 0$  :  $2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$

$$\therefore p(x) = a_0 + a_1 x + a_3 x^3 \in \langle \{1, x, x^3\} \rangle$$

Luego - como  $1, x, x^3 \in W$  - se tiene que

$\{1, x, x^3\}$  genera.

En este caso, es evidentemente l.i.

$\therefore$  es base y  $\dim W = 3$ .



2)

Para encontrar una base de  $U \cap W$ , consideremos  $p \in U \cap W$ , luego  $p$  se escribe como:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

y cumple las condiciones de  $U$  y  $W$   $\left\{ \begin{array}{l} p(1) = 0 \\ p'(1) = 0 \\ p''(0) = 0 \end{array} \right. \quad (*)$

Calculamos  $p'$  y  $p''$ :

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$$

$$p''(x) = 2a_2 + 6a_3 x$$

Entonces, por  $(*)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} p(1) = 0 \Rightarrow a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \quad (1) \\ p'(1) = 0 \Rightarrow a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \quad (2) \\ p''(0) = 0 \Rightarrow 2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0 \quad (3) \end{array} \right.$$

Usando  $(3)$  sobre  $(1)$  y  $(2)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1 + a_3 = 0 \quad (1') \\ a_1 + 3a_3 = 0 \Rightarrow a_1 = -3a_3 \quad (2') \end{array} \right.$$

Usando  $(2')$  sobre  $(1')$ :

$$a_0 - 3a_3 + a_3 = 0 \Rightarrow a_0 = 2a_3$$

$$\therefore \left\{ \begin{array}{l} a_0 = 2a_3 \\ a_1 = -3a_3 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = a_3 \end{array} \right.$$



$\therefore$   $P$  se escribe como:

$$P(x) = 2e_3 + (-3e_3)x + e_3x^3$$

$$= [2 - 3x + x^3]e_3$$

$\therefore$  Por esto - sumado a que  $[2 - 3x + x^3] \in U \cap W$ , -  
se tiene que  $U \cap W = \langle \{2 - 3x + x^3\} \rangle$

genero. Adem\u00e1s, evidentemente es l. i. luego,  
es base. finalmente  $\dim U \cap W = 1$

3) P.D.Q.  $IP_3(\mathbb{R}) = U + W$

En efecto: Como  $U$  y  $W$  son s.e.v. de  $IP_3(\mathbb{R})$ ,  
 $U + W$  tambi\u00e9n lo es. Adem\u00e1s:

$$\begin{aligned} \dim U + W &= \dim U + \dim W - \dim U \cap W \\ &= 2 + 3 - 1 \\ &= 4 = \dim IP_3(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

$$\therefore U + W = IP_3(\mathbb{R})$$