MA1102-3: Álgebra Lineal
Profesor: Jaime San Martín
Auxiliar: Felipe Hernández Castro

Auxiliar 6 - Espacios Vectoriales

29 de octubre de 2018

P1. Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

a) Pruebe que A es invertible $\Leftrightarrow$ sus columnas son l.i. (¿Que ocurre si sus filas son l.i.?).

b) Concluya que A es invertible $\Leftrightarrow$ sus columnas conforman una base de $\mathbb{R}^n$.

P2. Considere el conjunto de vectores $V = \{ \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \\ \beta \\ -\alpha \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

a) Demuestre que V es s.e.v. de $\mathbb{R}^4$, y encuentre una base de V. ¿$V = \mathbb{R}^4$?

b) Complete la base obtenida anterior hasta obtener una base de $\mathbb{R}^4$.

P3. Para $n \in \mathbb{N}$ se define $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ como el espacio vectorial de los polinomios con grado menor o igual a n a coeficientes reales. Sea:

$$V = \{p(x) \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) | p(x) = q(x)(x^2+5), \text{ para algún polinomio a coef. reales } q(x)\}$$

a) Pruebe que V es un subespacio vectorial de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

b) Encuentre una base de V.

c) Calcule *dim* V.

d) Pruebe que $V \oplus \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

P4. Indique si el conjunto de vectores dados:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Es linealmente dependiente y en dicho caso entregue un subconjunto B de tamaño máximo de vectores linealmente independientes ¿B es base de $\mathbb{R}^3$?.

P5. Considere el e.v. $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes en $\mathbb{R}$, considere el s.e.v. $U = \{p(x) \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) | p(1) = p'(1) = 0\}$.

a) Encuentre una base de U y su dimensión.

b) Extienda la base de la parte anterior a una base de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

c) Considere ahora el s.e.v. $W = \{p(x) \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) | p''(0) = 0\}$

1) Encuentre una base de W y su dimensión.
2) Encuentre una base de $U \cap W$ y su dimensión.
3) Pruebe que $\mathbb{P}_3(\mathbb{R}) = U + W$.

Resumen

- **[Conjunto generador]**: Sea V un e.v., diremos que los vectores $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$ generan V si y solo si:
$$\langle \{v_1, ..., v_n, \} \rangle = V$$
Observación: Como $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$, la inclusion $\langle \{v_1, ..., v_n\} \rangle \subseteq V$ se tiene por definicion de espacio vectorial. Luego solo basta ver: $\forall v \in V, \exists \{\lambda_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{K}$ tal que $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$.
- **[Base]**: Dado un e.v V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, diremos que el conjunto de vectores $\{v_i\}_{i=1}^n$ es base de V si y sólo si:
    1. $\{v_i\}_{i=1}^n$ es l.i.
    2. $\{v_i\}_{i=1}^n$ genera V.
- **[Proposición 1]**: Dado un e.v V, $B = \{v_i\}_{i=1}^n$ es base si y sólo si $\forall v \in V$, v se escribe de manera única como combinación lineal de los vectores del conjunto B.
- **[Proposición 2]**: Si $X = \{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$ es un conjunto generador, entonces es posible extraer un subconjunto $B = \{v_{i_1}, ..., v_{i_s}\}$ que es base de V.
- **[Dimensión de un espacio vectorial.]**: Diremos que un e.v. V es de dimensión n (finita) si existe una base de n elementos. En caso que no exista una base fiinta, hablaremos de espacio vectorial de dimensión infinita. Denotaremos la dimension como $dim\ V$.
- **[Teoremas]**:
    1. Sea $dim\ V = n$. Si $\{v_i\}_{i=1}^n$ es l.i. o genera, entonces es base.
    2. Sea U s.e.v. de V, luego $dim\ U \leq dim\ V$, más aún se tiene que $dim\ U = dim\ V \Rightarrow U = V$.
- **[Teorema de completación de bases]**: Dado un e.v. V con $dim\ V = n$, y un conjunto de vectores l.i. $\{v_1, ..., v_r\}$, con $r < n$, entonces existen vectores $v_{r+1}, ..., v_n$, tales que el conjunto $\{v_1, ..., v_n\}$ es base de V.
- **[Suma de espacios vectoriales]**: Sean U, W s.e.v. de V, se define:
$$U + W = \{v \in V | v = u + w, u \in U, w \in W\}.$$
Observación: $U + W$ es s.e.v. de V.
- **[Suma Directa]**: Sean U, W s.e.v. de V, diremos que $Z = U + W$ es suma directa de U y W, denotando $U \oplus W = Z$ si $\forall v \in Z$ se escribe de manera unica como :
$$v = u + w, \quad u \in U, w \in W.$$
- **[Caracterización de la suma directa]**: Dado V e.v. y U, W, Z s.e.v. de V, entonces:
$$U \oplus W = Z \Leftrightarrow (Z = U + W) \wedge (U \cap W = \{0\})$$
- **[Dim de la suma directa]**: Sea V de dimensión finita.
    1. Si $V = U \oplus W$ y V, entonces $dim\ V = dim\ U + dim\ W$
    2. Si $V = U + W$ y V, entonces $dim\ V = dim\ U + dim\ W - dim\ U \cap W$