MA1102-3: Álgebra Lineal
Profesor: Jaime San Martín
Auxiliar: Felipe Hernández Castro

Auxiliar 4 - Geometría II

17 de octubre de 2018

P1. Sea Π un plano, $L \subset \Pi$ una recta y sea $P \in \mathbb{R}^3$ un punto cualquiera. Denotamos:

- R a la proyección ortogonal de P sobre el plano Π.
- Q a la proyección ortogonal de P sobre la recta L.

Demuestre que si $R \neq Q$, entonces la recta que pasa por los puntos R y Q es perpendicular a la recta L.

P2. Sea $P = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y Π_1 el plano que pasa por el origen y tiene vectores directores $d_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $d_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Calcule la proyección ortogonal P_0 de P sobre el plano Π_1.

(b) Calcule la ecuación de la recta L que se obtiene como la intersección de Π_1 con el plano Π_2 de ecuación $x + 2y = 2$

(c) Calcule la proyección ortogonal de P_0 sobre la recta L.

(d) Calcule la distancia de P a la recta L.

P3. Considere el plano:

$$\Pi : x + y + z = 1$$

Determine las coordenadas del punto proyección del origen sobre el plano Π y calcule la distancia del origen al plano Π

P4. Sean $p, d, n \in \mathbb{R}^3$ con $d \neq 0$ y $n \neq 0$, se definen los conjuntos:

$$L = \{x \in \mathbb{R}^3 | (x - p) \times d = 0\}$$

$$\Pi = \{x \in \mathbb{R}^3 | \langle x, n \rangle = 0\}$$

a) Demuestre que L es una recta.

b) Encuentre las condiciones que deben satisfacer p , d y n para que $L \cap \Pi = \emptyset$

P5. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que x es ortogonal a y si y solo si $(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \ \ \|x + \lambda y\| \geq \|x\|$.

Resumen

- **[Producto cruz]**: Sean x, $y \in \mathbb{R}^3$, tales que $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, definimos el producto cruz $x \times y$ como el siguiente vector:

$$x \times y = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

  En donde:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

- **[Propiedades del producto cruz]**:
  - $x \times x = 0$
  - $v \times (x + y) = v \times x + v \times y$, es decir, el producto cruz distribuye con respecto a la suma.
  - Si $z = x \times y$, entonces z es perpendicular a x e y, es decir: $\langle z, x \rangle = 0 = \langle z, y \rangle$
  - $x \times y = -y \times x$, es decir, el producto cruz es antisimétrico.
  - La norma del producto cruz esta dada por $\|x \times y\| = \|x\|\|y\||sen\theta|$ con θ el ángulo que subtienden x e y.
  - Dados $x, y \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ tales que $x \times y = 0$ entonces $(x \parallel y)$
- **[Proyección de un punto a una recta]**: Sea $L : p + \lambda d$ una recta y q un punto en $\mathbb{R}^3$. Si llamamos r a la proyección de q sobre L , entonces tenemos que:

$$r = p + \langle q - p, \hat{d} \rangle \hat{d}$$

  Donde $\hat{d} = \frac{d}{\|d\|}$
- **[Proyección de un punto a un plano]**: Sea $\Pi : \langle x - p, n \rangle$ un plano y q un punto en $\mathbb{R}^3$. Si llamamos r a la proyección de q sobre Π , entonces tenemos que:

$$r = q + \langle p - q, \hat{n} \rangle \hat{n}$$

- **[Distancia de un punto a un plano]**: Dado un plano Π cuya ecuación cartesiana este dada por: $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$ y q un punto en $\mathbb{R}^3$. Entonces se tiene que:

$$d(q, \Pi) = \frac{|Aq_1 + Bq_2 + Cq_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$