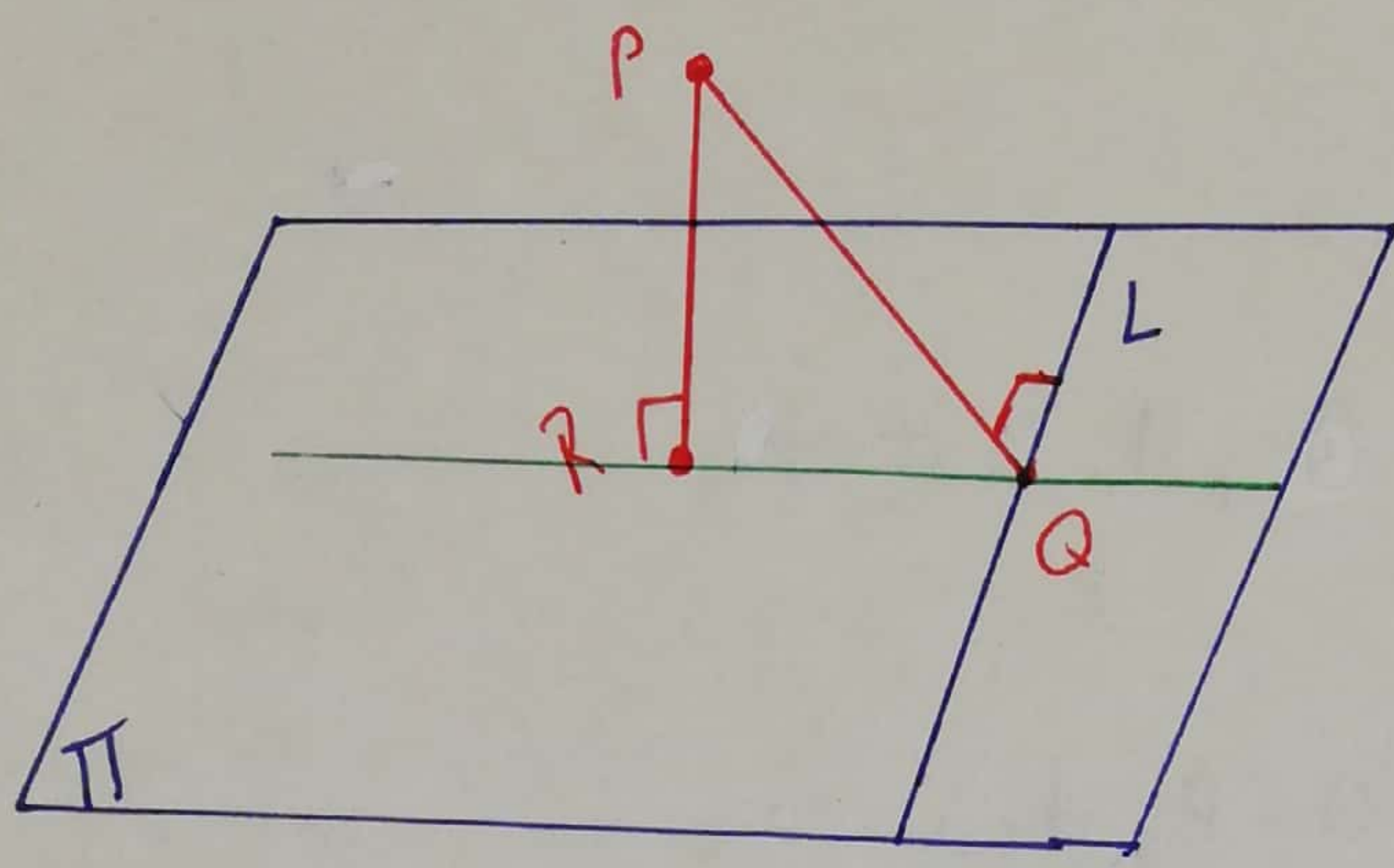


Punto Auxiliar U

P1



Lo ideal es ver que $L_2 \perp L_1$, o sea que si d_2 es director de L_2 y d_1 es director de L_1 , entonces $d_1 \perp d_2$

$$\Leftrightarrow \langle d_1, d_2 \rangle = 0$$

- Notar que, por ejemplo, $d_2 = R - Q$ } contenido en el plano

Así, hay que probar que $\langle d_1, R - Q \rangle = 0$

P.D.Q. $\langle d_1, R - Q \rangle = 0$

En efecto:

- Notar que $(P - R)$ es normal al plano, y d_1 está contenido en el plano (director de la recta) luego:

$$\bullet \langle P - R, d_1 \rangle = 0 \quad (1)$$

Pues $P - R \perp \Pi \Rightarrow P - R \perp d_1$

- Notar que $(Q - P)$ es normal a la recta (perpendicular) luego:

$$\bullet \langle Q - P, d_1 \rangle = 0 \quad (2)$$

Sumando (1) y (2) :

$$\langle P - R, d_1 \rangle + \langle Q - P, d_1 \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle P - R + Q - P, d_1 \rangle = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\langle Q - R, d_1 \rangle = 0$$

pero lo que queriamos mostrar $\square$

Ponto Auxiliar 4

P2

$$P = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Pi_1: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Usando a fórmula:

$$P_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{n} \right\rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$$

Donde $\vec{n}$ lo calculamos como: $\vec{n} = d_1 \times d_2$

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i} [-(-1)] - \hat{j} [-1] + \hat{k} [1-2] \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore P_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{(1^2 + 1^2 + 1^2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{(3 - 2 + 2)}{3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1

6)

- Un camino es para Π_2 o vectorial y resolver el sistema, pero otro es para Π_1 e cartesiano:

$$\Pi_1 : \langle x, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

(o $x + y - z = 0$ con otra notación)

Osi L es la solución del sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Resolvemos como en Aul 3!

- Despejamos una variable con 4 ecuación:

$$x + 2y = 2 \Rightarrow x = 2 - 2y$$

$$x + y - z = 0 \Rightarrow z = x + y = 2 - 2y + y = 2 - y$$

$$\therefore z = 2 - y$$

$$\text{Osi si } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in L :$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2y \\ y \\ 2 - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ec. d. la recta.

$$(c) \quad P_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L: \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Utilisons la formule :

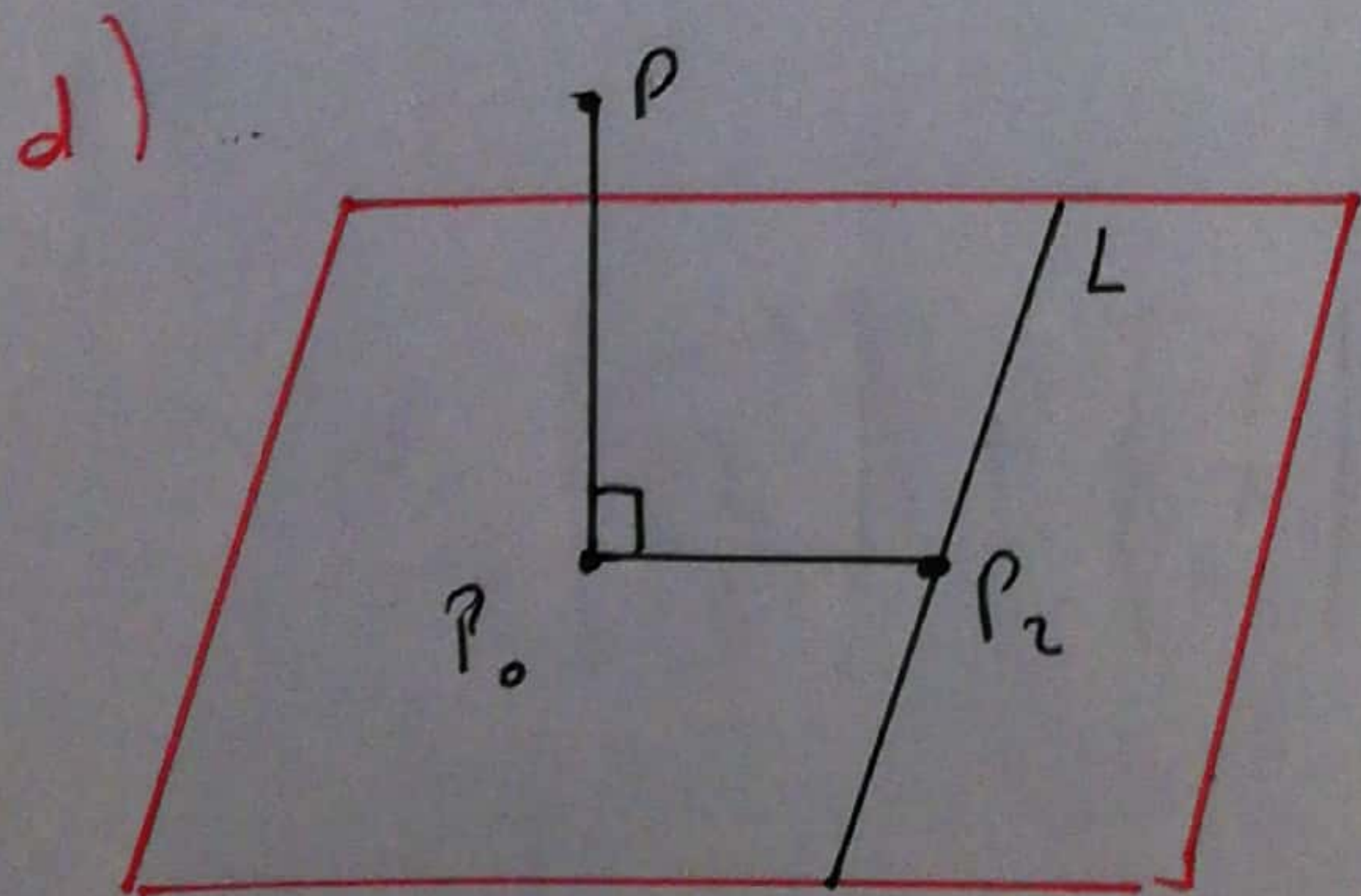
$$P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left((-2)^2 + 1^2 + (-1)^2 \right)} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

↓
projection
de P_0 sur L

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{[4 + 1 + 1]}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{(8 + 3 + 1)}{6}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{12}{6} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Intuitivement c'est la projection
de P sur L (projeté de P sur L)

Donc :

$$d(P, L) = \|P - P_2\| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2}$$

$$= \sqrt{5}$$

Exercice: P_2 est projection de P sur L si :

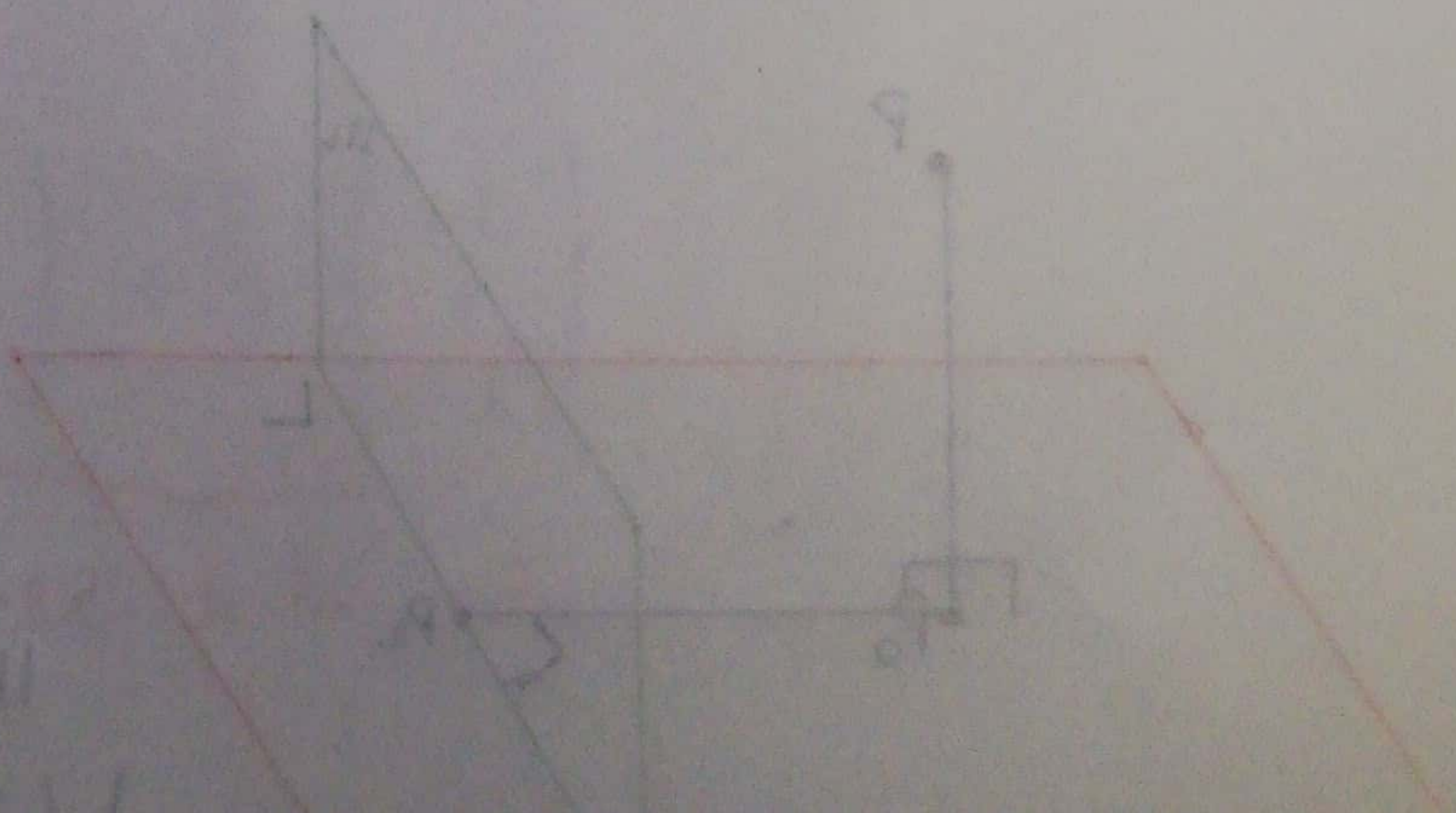
$$\begin{cases} P_2 \in L \\ (P_2 - P) \perp L \end{cases}$$

- $P_2 \in L$ par partie c)
- $(P_2 - P) \perp L$ par les calculs

$$\langle (P_2 - P), d_1 \rangle$$

$\perp$
directeur de L

et donc on obtient $\langle (P_2 - P), d_1 \rangle = 0$



Punto Auxiliar 4

P3]

$$\Pi : x + y + z = 1$$

- ¿Proyección de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sobre Π ?

Para la proyección se trabaja con la ec. normal.

Buscamos a normal:

$$\text{Como } \Pi : x + y + z = 1$$

- Tenemos que un vector normal sera:

$$n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- por otro lado, es facil ver que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertenece al plano. Asi:

$$\Pi : \left\langle x - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

Luego la proyección de 0 a Π sera:

$$P_{\Pi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (-1)}{3}$$

Luego la distancia del origen al plano es:

$$\|P_{\Pi} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\| = \|P_{\Pi}\| = \left\| -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Punto Auxiliar 4

P4]

$$L = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid (x-p) \times d = 0 \}$$

$$\Pi = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, n \rangle = 0 \}$$

a) P. D. Q. L es recta

$$\text{Sea } L_2 = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x = p + \lambda d, \lambda \in \mathbb{R} \} \text{ recta}$$

veamos que $L = L_2$ y con esto que L es recta:

$$\underline{\subseteq} \text{ Sea } x \in L \Leftrightarrow (x-p) \times d = 0$$

$$\text{luego } \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad (x-p) = \lambda d$$

$$\text{pues } (x-p) \times d = 0 \Rightarrow (x-p) \parallel d$$

$$\text{osi } x = p + \lambda d \Rightarrow x \in L_2$$

$$\underline{\supseteq} \text{ Sea } x \in L_2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, x = p + \lambda d$$

$$\text{osi: } (x-p) \times d = (\lambda d) \times d = \lambda \cdot \underbrace{(d \times d)}_{=0} = 0$$

Luego $L = L_2$ y L es recta //

$$6) \text{ Sea } x \in L \cap \Pi \Rightarrow x \in L \wedge x \in \Pi$$

Entonces:

$$\bullet x \in L \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, x = p + \lambda d \quad (1)$$

$$\bullet x \in \Pi \Rightarrow \langle x, n \rangle = 0 \quad (2)$$

reemplazando (1) en (2):

$$\langle p + \lambda d, n \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle p, n \rangle + \lambda \langle d, n \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda \langle d, n \rangle = -\langle p, n \rangle \quad (3)$$

- Si efectivamente existe un lambda que satisfaga (3), entonces existira x en $L \cap \Pi$, por ende debemos buscar las condiciones sobre λ para que este no cumpla (3) y por ende surja una contradicción si pudiéramos despejar λ , tendríamos que:

$$\lambda = \frac{-\langle p, n \rangle}{\langle d, n \rangle} \quad \therefore \text{imponemos } \langle d, n \rangle = 0$$

(pero que no exista λ)

Si (3) se convierte en: $0 = -\langle p, n \rangle$

lo cual ocurre para cualquier λ si $\langle p, n \rangle = 0$

$\therefore$ imponemos $\langle p, n \rangle \neq 0$ si $0 = -\langle p, n \rangle$ no
entonces una contradicción ~~×~~ $\therefore \begin{cases} \langle d, n \rangle = 0 \\ \langle p, n \rangle \neq 0 \end{cases}$

Punto Auxiliar 4

P 5

P.D.a. x ortogonal a $y \Leftrightarrow (\forall \lambda \in \mathbb{R}) \|x + \lambda y\| \geq \|x\|$

En efecto:

$\Rightarrow$ Si $x \perp y$ entonces $\langle x, y \rangle = 0$

Nota que, dado $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \|x + \lambda y\|^2 &= \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle \end{aligned}$$

$$\langle x, y \rangle = 0 \quad \hookrightarrow \quad = \langle x, x \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle$$

$$\lambda^2 \langle y, y \rangle \geq 0 \quad \hookrightarrow \quad \geq \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

$$\therefore \|x + \lambda y\|^2 \geq \|x\|^2$$

$$\Rightarrow \|x + \lambda y\| \geq \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{pues } \|x + \lambda y\| \geq 0 \wedge \|x\| \geq 0$$

$\Leftarrow$ Nuestra hipótesis es que:

$$\|x + \lambda y\| \geq \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \|x + \lambda y\|^2 \geq \|x\|^2$$

$$\Leftrightarrow \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \geq \langle x, x \rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \lambda^2 \geq \langle x, x \rangle$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle \geq 0 \quad (*)$$

- Queremos ver que $\langle x, y \rangle = 0$ pero solo tenemos desigualdades. Uno bueno idea sería tratar de ver que $\langle x, y \rangle \geq 0 \wedge \langle x, y \rangle \leq 0$, tomando valores positivos y negativos de λ , pero veremos que no es posible hacer tal cosa:

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera.

- Notemos que en $\lambda = 0$ la desigualdad $(*)$ es inútil. Dividamos en caso entonces:

$\lambda > 0$ Sea $\lambda = \varepsilon$.

Luego $2\varepsilon \langle x, y \rangle + \varepsilon^2 \langle y, y \rangle \geq 0$

$\varepsilon > 0 \hookrightarrow \Leftrightarrow 2\langle x, y \rangle + \varepsilon \langle y, y \rangle \geq 0$

$\lambda < 0$ Sea $\lambda = -\varepsilon$

Luego $-2\varepsilon \langle x, y \rangle + \varepsilon^2 \langle y, y \rangle \geq 0$

$\varepsilon > 0 \hookrightarrow \Leftrightarrow -2\langle x, y \rangle + \varepsilon \langle y, y \rangle \geq 0$

Así, tenemos que $\forall \epsilon > 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \langle x, y \rangle + \epsilon \langle y, y \rangle \geq 0 \\ -2 \langle x, y \rangle + \epsilon \langle y, y \rangle \geq 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

$$-2 \langle x, y \rangle + \epsilon \langle y, y \rangle \geq 0 \quad (2)$$

Sin importar el valor de ϵ que tomemos, no se
 podría concluir! Sin embargo:

$$(1) \Leftrightarrow 2 \langle x, y \rangle \geq -\epsilon \langle y, y \rangle$$

$$(2) \Leftrightarrow \langle y, y \rangle \geq 2 \langle x, y \rangle$$

hugo:

$$\varepsilon \langle y, y \rangle \geq 2 \langle x, y \rangle \geq -\varepsilon \langle y, y \rangle$$

$$\Leftrightarrow \epsilon \langle y, y \rangle \geq |2 \langle x, y \rangle| \geq 0$$

Podemos sacar el valor de $\langle x, y \rangle$ tanto como queramos!
 Osi, tomando

Or, tomando $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$0 \geq 12 \langle x, y \rangle \geq 0 \Rightarrow |\langle x, y \rangle| = 0$$
$$\Rightarrow \langle x, y \rangle = 0$$

Concluyendo.