MA1102-3: Álgebra Lineal
Profesor: Jaime San Martín
Auxiliar: Felipe Hernández Castro

Resumen - C1

21 de Octubre de 2018

1.- Matrices

- **[Producto de matrices]**: Dadas $A \in \mathcal{M}_{mr}(\mathbb{K})$,$B \in \mathcal{M}_{rn}(\mathbb{K})$ se define el producto $C = AB$ como aquella matriz $C \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ tal que:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}, \quad i = 1, ..., m, j = 1, ..., n.$$

- **[Igualdad de matrices]**: Diremos que dos matrices A,$B \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$ son iguales si es que $\forall i = 1, \ldots, n, \forall j = 1, \ldots, m$ se tiene que $a_{ij} = b_{ij}$

- **[Notación: filas y columnas]** Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ notaremos su i-ésima fila como:

$$A_{i\bullet} = (a_{i1}a_{i2} \ldots a_{in})$$

y su j-ésima columna:

$$A_{\bullet j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Podemos escribir entonces la matriz: $A = (A_{\bullet 1}, A_{\bullet 2}, \ldots, A_{\bullet n})$ denominada notación por columnas. O bien:
$A = \begin{pmatrix} A_{1\bullet} \\ A_{2\bullet} \\ \vdots \\ A_{m\bullet} \end{pmatrix}$, correspondiente a la notación por filas.

- **[Matriz invertible]**: Diremos que $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ es **invertible** si y solo si $\exists B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ tal que:

$$AB = BA = I$$

De existir B, esta es **única**. Así, anotamos $B = A^{-1}$.

- **[Matriz traspuesta]** Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$, se define la matriz **traspuesta** de A como aquella matriz de $n \times m$ que denotaremos por A^t tal que $(A^t)_{ij} = (A)_{ji}$.

- **[Matriz simetrica]** Diremos que $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ es **simétrica** si y sólo si $A = A^t$.

- **[Matriz Nilpotente]** Diremos que una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ es **Nilpotente** si y solo si $\exists k \in \mathbb{N}, A^k = 0$.

2.- Sistemas de ecuaciones

- **[Matriz de permutación]**: Se define la matriz elemental de permutación I_{pq} como la matriz que se construye a partir de la identidad, permutando las filas p y q.

- **[Permutación de filas y columnas]**: Dada una matriz elemental de permutación $I_{pq} \in \mathcal{M}_{nn}$, $A \in \mathcal{M}_{nm}$ y $B \in \mathcal{M}_{sn}$ se tiene que:
  - $I_{pq}A$ corresponde a la matriz A con las filas p y q permutadas.
  - BI_{pq} corresponde a la matriz B con las columnas p y q permutadas.

- **[Matriz de suma]**: Se define la matriz elemental de suma $E_{p,q}(\lambda) \in \mathcal{M}_{nn}$ como la que se construye a partir de la identidad, agregando λ a la posición (q, p) (columna p y fila q).

- **[Suma y ponderación de filas]**: Dada una matriz elemental de suma $E_{p,q}(\lambda) \in \mathcal{M}_{nn}$ y una matriz $A \in \mathcal{M}_{nm}$ cualquiera, se tiene que:
  - Si $p < q$, $E_{p,q}(\lambda)A$ entrega la misma matriz A pero en la fila q, se le suma la fila p multiplicada por λ, es decir:
  $$E_{p,q}(\lambda)A = \begin{pmatrix} A_{1\bullet} \\ \vdots \\ A_{p\bullet} \\ \vdots \\ A_{q\bullet} + \lambda A_{p\bullet} \\ \vdots \\ A_{n\bullet} \end{pmatrix}$$
  - Si $p = q$, $E_{p,p}(\lambda)A$ entrega la misma matriz A pero con la fila p ponderada por λ, es decir:
  $$E_{p,p}(\lambda)A = \begin{pmatrix} A_{1\bullet} \\ \vdots \\ \lambda A_{p\bullet} \\ \vdots \\ A_{n\bullet} \end{pmatrix}$$
- **[Inversa de la matriz de suma]**: $E_{p,q}(\lambda)$ es **invertible**. Su inversa es $E_{p,q}(\lambda)^{-1} = E_{p,q}(-\lambda)$
- **[Propiedad importante]**: Dada una matriz C invertible, se tiene que $a \in \mathbb{K}^n$ es solución de $Ax = b$
  $\iff a$ es solución de $(CA)x = Cb$.
- **[Sistema compatible]**: Dado el sistema $Ax = b$, diremos que es compatible si existe al menos una solución.
- **[Propiedad 1]**: Dado el sistema $Ax = b$, sea $\tilde{A}$ un escalonamiento de A. Si $Ax = b$ es compatible y en $\tilde{A}$ existe un peldaño de largo mayor o igual a 2, entonces existen infinitas soluciones.
  Obs.: Si $A \in \mathcal{M}_{nm}$ con $n > m$, entonces el sistema tiene infinitas soluciones (pues como $n > m$ existen mas incognitas que ecuaciones).
- **[Propiedad 2]**: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}$, entonces las proposiciones siguientes son equivalentes:
  1. A es invertible.
  2. $\forall b \in \mathbb{K}^n$, $Ax = b$ tiene solución única.
  3. $\prod_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ii} \neq 0$.
- **[Propiedad 3]**: Una matriz triangular superior (inferior) es invertible si y sólo si todos sus elementos en la diagonal son no nulos.

3.-Geometría

- **[Recta]**: Sean p, $d \in \mathbb{R}^n$, llamaremos recta al conjunto L dado por:
  $$L_{p,d} = \{v \in \mathbb{R}^n | v = p + \alpha d, \alpha \in \mathbb{R}\}$$
- **[Vectores paralelos]**: Sean v, $w \in \mathbb{R}^n$, diremos que son paralelos ($x \parallel y$) si $\exists \lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ tal que $v = \lambda w$
- **[Plano]** Sean p, d_1, $d_2 \in \mathbb{R}^n$, llamaremos plano al conjunto Π dado por:
  $$\Pi_{p,d_1,d_2} = \{v \in \mathbb{R}^n | v = p + \alpha d_1 + \beta d_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$
- **[Producto punto en $\mathbb{R}^n$]** Dados $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$ se define el producto punto $\langle x, y\rangle$ como:
  $$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^t y = y^t x$$
- **[Norma Euclidiana $\|\cdot\|$]** Dado $x \in \mathbb{R}^n$ define la norma euclidiana como $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\langle x, x\rangle}$
- **[Vectores ortogonales]** Sean v, $w \in \mathbb{R}^n$, diremos que son ortogonales ($x \perp y$) si $\langle v, w\rangle = 0$
- **[Desigualdad Cauchy-Schwartz]** Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$, en donde la igualdad se da solo si $(x = 0) \vee (y = 0) \vee (x \parallel y)$

- **[Producto cruz]**: Sean $x,\ y \in \mathbb{R}^3$, tales que $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, definimos el producto cruz $x \times y$ como el siguiente vector:

$$x \times y = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

En donde:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

- **[Propiedades del producto cruz]**:
  - $x \times x = 0$
  - $v \times (x + y) = v \times x + v \times y$, es decir, el producto cruz distribuye con respecto a la suma.
  - Si $z = x \times y$, entonces z es perpendicular a x e y, es decir: $\langle z, x \rangle = 0 = \langle z, y \rangle$
  - $x \times y = -y \times x$, es decir, el producto cruz es antisimétrico.
  - La norma del producto cruz esta dada por $\|x \times y\| = \|x\| \|y\| |sen\theta|$ con θ el ángulo que subtienden x e y.
  - Dados $x, y \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ tales que $x \times y = 0$ entonces $(x \parallel y)$

- **[Proyección de un punto a una recta]**: Sea $L : p + \lambda d$ una recta y q un punto en $\mathbb{R}^3$. Si llamamos r a la proyección de q sobre L , entonces tenemos que:

$$r = p + \langle q - p, \hat{d} \rangle \hat{d}$$

Donde $\hat{d} = \frac{d}{\|d\|}$

- **[Proyección de un punto a un plano]**: Sea $\Pi : \langle x - p, n \rangle$ un plano y q un punto en $\mathbb{R}^3$. Si llamamos r a la proyección de q sobre Π , entonces tenemos que:

$$r = q + \langle p - q, \hat{n} \rangle \hat{n}$$

- **[Distancia de un punto a un plano]**: Dado un plano Π cuya ecuación cartesiana este dada por: $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$ y q un punto en $\mathbb{R}^3$. Entonces se tiene que:

$$d(q, \Pi) = \frac{|Aq_1 + Bq_2 + Cq_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

4.-Espacios Vectoriales

- **[Espacio Vectorial]**: Dado un grupo abeliano $(V, +)$ y un cuerpo $\mathcal{K}$. Diremos que V es un espacio vectorial sobre $\mathcal{K}$ si y solo si $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{K}$, $\forall x, y \in V$:

EV1: $(\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$.

EV2: $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

EV3: $\lambda(\beta x) = (\lambda\beta)x$.

EV4: $1 \cdot x = x$, donde 1 es el neutro multiplicativo del cuerpo $\mathcal{K}$.

- **[Subespacio Vectorial]**: Sea un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathcal{K}$. Diremos que un subconjunto $U \neq \emptyset$ de V, es un subespacio vectorial (s.e.v.) de V si cumple:
  - $\forall u, v \in U,\ u + v \in U$
  - $\forall \lambda \in \mathcal{K}, \forall u \in \mathcal{U},\ \lambda u \in \mathcal{U}$

- **[Caracterización Subespacio Vectorial]**: Sea un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathcal{K}$. Diremos que U es s.e.v. de V si cumple:
  - $0_V \in U$ (U no vació)
  - $U \subseteq V$
  - $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{K}, \forall u_1, u_2 \in U,\ \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in U$

- **[Independencia Lineal]**: Dado una colección $v_1, ..., v_n$ de vectores en un espacio vectorial V y de escalares $\lambda_1, ..., \lambda_n$ en $\mathcal{K}$.Denominamos combinación lineal a la suma ponderada de vectores:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

- **[Independencia Lineal]**: Dado el conjunto de vectores $\{x_1, ..., x_n\}$, diremos que es linealmente independiente si:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \Longrightarrow \lambda_i = 0 \forall i \in \{1, ..., n\}$$

Con $\lambda_i \in \mathcal{K}$ escalares.