

Leita Auxilio 5

P1]

$$B^3 = 0 \quad \wedge \quad M(\lambda) = I + \lambda B + \frac{\lambda^2}{2} B^2$$

(a) Sean $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ arbitrarios.

P.D.Q. $M(\lambda + \beta) = M(\lambda) \cdot M(\beta)$

En efecto:

$$\begin{aligned} \bullet M(\lambda + \beta) &= I + (\lambda + \beta) B + \frac{(\lambda + \beta)^2}{2} B^2 \\ &= I + \lambda B + \beta B + \frac{\lambda^2}{2} B^2 + \lambda \beta B^2 + \frac{\beta^2}{2} B^2 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet M(\lambda) \cdot M(\beta) &= \left(I + \lambda B + \frac{\lambda^2}{2} B^2 \right) \cdot \left(I + \beta B + \frac{\beta^2}{2} B^2 \right) \\ &= I + \beta B + \frac{\beta^2}{2} B + \lambda B + \lambda \beta B^2 + \frac{\lambda \beta^2}{2} \underbrace{B^3}_{=0} \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{2} B^2 + \frac{\lambda^2 \beta}{2} \underbrace{B^3}_{=0} + \frac{\lambda^2 \beta^2}{4} \underbrace{B^4}_{=0} \end{aligned}$$

Pero $B^3 = 0 \quad \wedge \quad B^4 = 0$. Así:

$$= I + \beta B + \frac{\beta^2}{2} B + \lambda B + \lambda \beta B + \frac{\lambda^2}{2} B^2$$

$$= M(\lambda + \beta)$$

↳ usando (1).

$$\therefore M(\lambda + \beta) = M(\lambda) \cdot M(\beta)$$

A demo:

$$M(\lambda) \cdot M(\beta) = M(\lambda + \beta) = M(\beta + \lambda) = M(\beta) \cdot M(\lambda)$$

para λ y β eran arbitrarios.

(6) Calculamos: $M(\lambda) \cdot M(-\lambda)$

$$M(\lambda) \cdot M(-\lambda) = M(\lambda - \lambda) = M(0) = I + 0 \cdot B + \frac{0^2}{2} B^2$$

Parte (a)

$$= I$$

$$\therefore M(\lambda) \cdot M(-\lambda) = I$$

Luego $M(-\lambda)$ es inversa de $M(\lambda)$ (esto verlo por la derecha

pues por prop del opuesto - como se tiene $M(\lambda) \cdot M(-\lambda) = I$ -
se tendrá $M(-\lambda) = M(\lambda)^{-1}$)

Punto Auxiliar 5

P2]

$$J_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{si } j \neq i+1 \end{cases}$$

(o) $D = J^2$

Calculamos la coordenada (i,j) de D :

$$D_{ij} = [J \cdot J]_{ij} = \sum_{h=1}^m J_{ih} \cdot J_{hj}$$

Concentramos en J_{ih} para separar la sumatoria:

$$J_{ih} = \begin{cases} 1 & \text{si } h = i+1 \\ 0 & \text{si } h \neq i+1 \end{cases}$$

Osi, podemos separar la suma anterior asi:

$$D_{ij} = \underbrace{\left(\sum_{\substack{h=1 \\ h \neq i+1}}^n J_{ih} \cdot J_{hj} \right)}_{=0 \text{ pues } J_{ih}=0 \forall h \neq i+1} + \underbrace{J_{i(i+1)}}_{=1 \text{ por def.}} \cdot J_{(i+1)j} = J_{(i+1)j}$$

$\therefore D_{ij} = J_{(i+1)j}$ y por def de J :

$$D_{ij} = J_{(i+1)j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1+1 = i+2 \\ 0 & \text{si } j \neq i+2 \end{cases}$$

(b) • El caso base se demuestra en la parte (b) (también se puede tomar la definición de J como caso base)

• hipótesis inductiva:

$$\forall k \leq n \quad J_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+k \\ 0 & \text{si } j \neq i+k \end{cases}$$

$\downarrow$
 n variable mundo,
 no dimensión de la matriz

• P. D. Q. $J_{ij}^{(n+1)} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+n+1 \\ 0 & \text{si } j \neq i+n+1 \end{cases}$

En efecto:

$$(J^{(n+1)})_{ij} = [J^n \cdot J]_{ij} = \sum_{k=1}^n J_{ik}^n \cdot J_{kj}$$

Demuero, pero separa la suma usando la definición de J^n (hipótesis):

$$J_{ik}^n = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i+n \\ 0 & \text{si } k \neq i+n \end{cases}$$

Así, separamos:

$$(J^{(n+1)})_{ij} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i+n}}^n J_{ik}^n J_{kj} + \underbrace{J_{i(i+n)}^n}_{=1 \text{ por def de } J^n} J_{(i+n)j}$$

$= 0$ pues
 $J_{ik}^n = 0 \quad \forall k \neq i+n$

$$= J_{(i+n)j}$$

$$\therefore (J^{n+1})_{i,j} = J_{(i+n),j} \quad \text{por definici3n de } J:$$

$$(J^{n+1})_{i,j} = J_{(i+n),j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+n+1 \\ 0 & \text{si } j \neq i+n+1 \end{cases}$$

finalizando la demostraci3n.

Por ultimo, para J^n : $\rightarrow$ n de dimensi3n de la matriz, el n de la inducci3n es una variable muda.

$$J^n_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+n \\ 0 & \text{si } j \neq i+n \end{cases}$$

pero como $1 \leq i, 1 \leq j, i \leq n, j \leq n$ } J es de $n \times n$

tenemos que si $j = i+n \Rightarrow j \geq 1+n$

pero $j \leq n \rightarrow \times \therefore$ nunca ocurre $j = i+n$

$$\text{luego } J^n_{i,j} = 0 \Rightarrow J = \underline{\underline{O_{n \times n}}}$$

Punto Auxiliar 5

P3 Matricialmente el sistema es:

$$\left(\begin{array}{cc|cc|c} -1 & 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \beta & \alpha & 0 & 0 \end{array} \right)$$

• Excluyendo:

$$\xrightarrow{E_{14}(\beta) \cdot E_{13}(\alpha)} \left(\begin{array}{cc|cc|c} -1 & 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha^2 & \alpha\beta & 0 \\ 0 & \beta & \beta\alpha + \alpha & \beta^2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{E_{24}(-\beta) \cdot E_{23}(-\beta)} \left(\begin{array}{cc|cc|c} -1 & 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & (\alpha^2 - \alpha\beta)(\alpha\beta - \beta^2) & & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Permutando las filas 3 y 4:

$$\xrightarrow{I_{34}} \left(\begin{array}{cc|cc|c} -1 & 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(\alpha - \beta) & \beta(\alpha - \beta) & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{E_{34}(-(\alpha-\beta))} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta(\alpha-\beta) & 0 \end{array} \right)$$

Luego, el sistema tiene sol. única si los pivotes de la matriz escalonada son no nulos, si las condiciones son:

$$\alpha \neq 0 \wedge \beta(\alpha-\beta) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \Uparrow \alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0 \wedge \alpha \neq \beta$$

$\sqsubset$

Punto Auxiliar 5

P4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

invertir con Gauss se encuentra la solución del sistema matricial $AX = I$. Escribimos la matriz extendida y resolvemos:

$$(A | I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$E_{13}(-2) \cdot E_{12}(1)$ $\rightarrow$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$E_{24}(-1) \cdot E_{23}(1)$ $\rightarrow$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\underline{E_{32}(1)} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\underline{E_{21}(-\frac{2}{3})E_{31}(1)E_{41}(-\frac{1}{3})} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

dividiendo la fila 2 por 3, la 3 por (-3), y la fila 4 por (-3):

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array} \right)$$

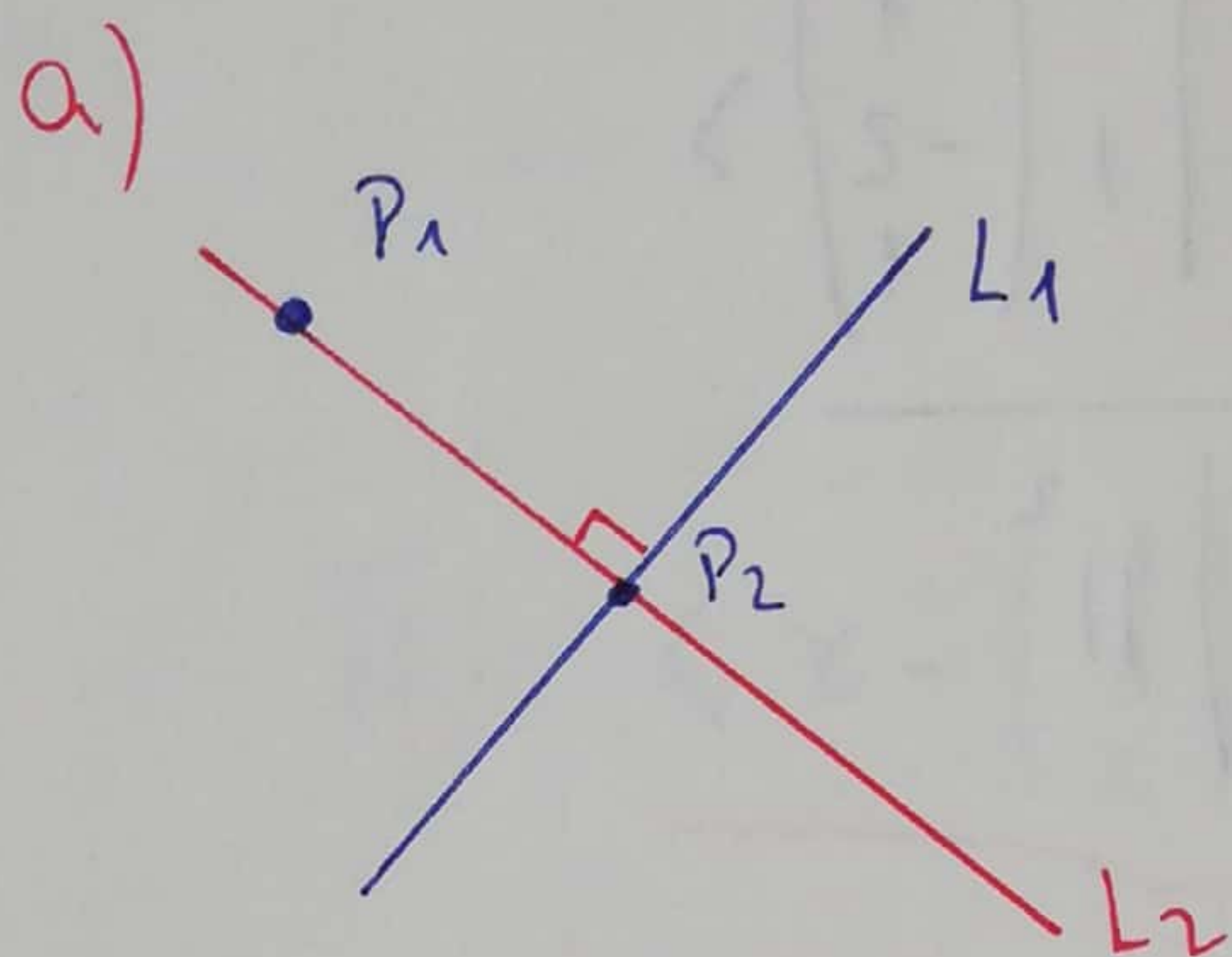
Inverse

Luego $A^{-1} = \left(\begin{array}{cccc} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array} \right)$

Punto Auxiliar 5

P5

$$L_1: \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Notar que $P_2 (L_1 \cap L_2)$ es la proyección de P_1 sobre L_1 (pues $L_1 \perp L_2$). Calculamos P_2 :

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|^2}$$

↓
fórmula
conocida
(Resumen AUX 4)

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{((-4) \cdot 2 + (-2) \cdot 3)}{(1^2 + 2^2 + 3^2)}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{(-14)}{14} = \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 5 - 2 \\ 4 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego L_2 es la recta que pasa por P_1 y P_2 :

$$L_2: P_1 + \lambda_2 (P_1 - P_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la distancia entre L_2 y $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ debemos hallar

su proyección sobre L_2 , llamémoslo P_3 :

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{\begin{pmatrix} 2 + 2 \end{pmatrix}}{\underbrace{(1^2 + 2^2 + 1^2)}_{=1}}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Longo dist}(L_2, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}) = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$$

6) Necesitamos una posición y un normal:

• Posición: $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ Por ejemplo, el posición de L_2

• Normal: $\vec{n} = d_1 \times d_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$
directores de
los vectores L_1 y L_2

$$= \hat{c} \cdot (2 - (-6)) - \hat{j} (1 - 3) + \hat{k} (-2 - 2)$$

$$= 8\hat{c} + 2\hat{j} + (-4)\hat{k} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{II: } \underbrace{\left\langle x - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle = 0}_{\text{}} //$$

$$\langle x - p, \vec{n} \rangle = 0$$

Punto Auxiliar 5

P6

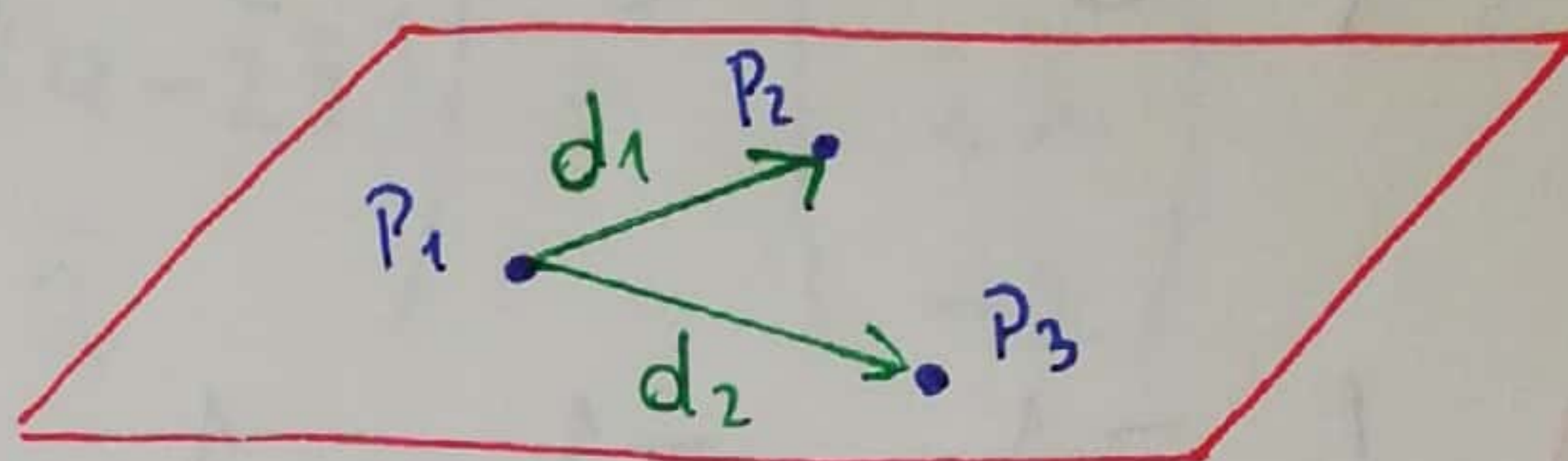
(a)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{P_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{P_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{P_3}$$

Elegimos posición P_1 , y directores:

$$d_1 = P_2 - P_1$$

$$d_2 = P_3 - P_1$$



$$\text{Or: } \Pi: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad L: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para encontrar $P = \Pi \cap L$, hay que resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escalonamos:

$$\xrightarrow{E_{13}(2)} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & -2 & -2 & | & 4 \\ 0 & -2 & 3 & | & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{23}(-1)} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & -2 & -2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 5 & | & 0 \end{pmatrix}$$

luego por fila 3, $\lambda = 0$ $\therefore$ podemos decir que

$$P = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para verificar que efectivamente $\Pi \Lambda L$ es un punto, podemos encontrar λ_1 y λ_2 (si sabemos como no es necesario).

$$\text{por fila 2} \quad -2\lambda_2 = 4 \Rightarrow \lambda_2 = -2$$

$$\text{por fila 1} \quad -\lambda_1 - \lambda_2 = 2$$

$$\Leftrightarrow -\lambda_1 + 2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0$$

evaluando Π en $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -2$ obtenemos $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

como esperábamos.

c) $d(P, Q) = 9 \Leftrightarrow \|P - Q\| = 9$

Como $Q = \Pi_2 \wedge L \Rightarrow Q \in L$

Luego $\exists \bar{\lambda} \in \mathbb{R}$, $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \bar{\lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + \bar{\lambda} \\ 4 - 2\bar{\lambda} \\ \bar{\lambda} \end{pmatrix}$

Or: $P - Q = \begin{pmatrix} 3 - (3 + \bar{\lambda}) \\ 4 - (4 - 2\bar{\lambda}) \\ 0 - \bar{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{\lambda} \\ 2\bar{\lambda} \\ -\bar{\lambda} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|P - Q\| &= \sqrt{(-\bar{\lambda})^2 + (2\bar{\lambda})^2 + (-\bar{\lambda})^2} \\ &= \sqrt{\bar{\lambda}^2 + 4\bar{\lambda}^2 + \bar{\lambda}^2} \\ &= \bar{\lambda} \cdot \sqrt{6} \end{aligned}$$

Pero $\|P - Q\| = 9 \Rightarrow \bar{\lambda} \sqrt{6} = 9$

$$\Rightarrow \bar{\lambda} = \frac{\sqrt{6} \cdot 9}{6} = \frac{\sqrt{6} \cdot 3}{2}$$

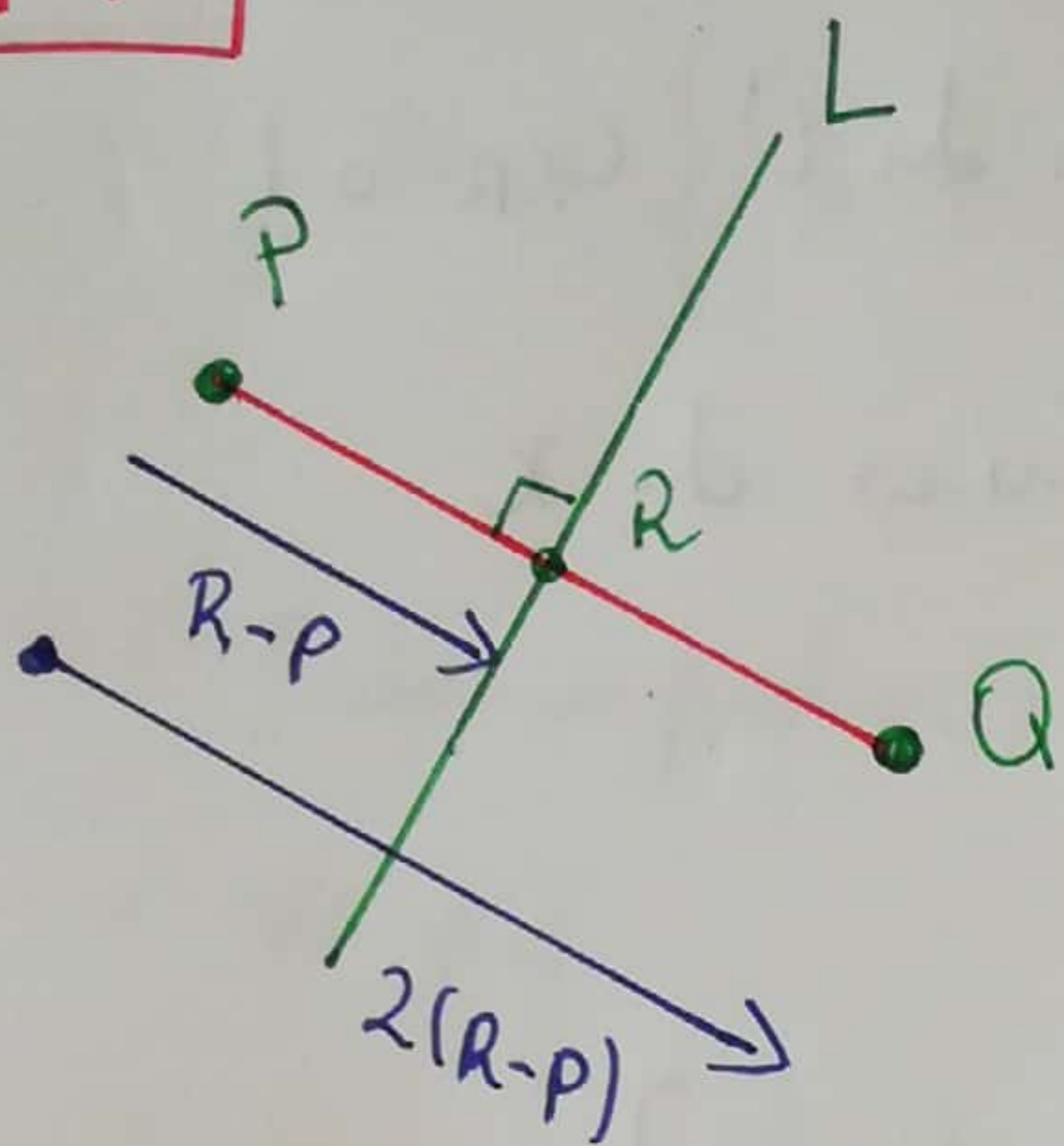
Or: $Q = \begin{pmatrix} 3 + \frac{3\sqrt{6}}{2} \\ 4 - 3\sqrt{6} \\ \frac{3\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}$

Directores de Π_1 por $\Pi_1 // \Pi_2$

Luego Π_2 : $\begin{pmatrix} 3 + \frac{3\sqrt{6}}{2} \\ 4 - 3\sqrt{6} \\ \frac{3\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Punto Auxiliar 5

P7



$$L: A + \lambda d$$

El simétrico tiene la característica de estar a la misma distancia de la recta, y tener la misma proyección R de P sobre la recta L, o en otras

palabras, Q pasa por la recta que une R y P.

En particular, es importante notar que:

$$Q - P = 2(R - P) \quad (\text{ver dibujo})$$

Esto pues P, R y Q son colineales y $\|P - R\| = \|R - Q\|$ al ser R la proyección de P y Q (y estar a igual distancia de L)

$$\text{Luego: } Q = P + 2(R - P)$$

No falta hallar R. Usamos fórmula conocida de proyecciones:

$$R = A + \frac{\langle P - A, d \rangle}{\|d\|^2} d, \text{ Luego:}$$

$$Q = P + 2 \left[A + \frac{\langle P - A, d \rangle}{\|d\|^2} d - P \right]$$

P71

b)

queremos encontrar los puntos simétricos de L' c/r a L

Sea $X \in L'$. Por parte a) el simétrico de X

c/r a L es:

$$X_s = X + 2 \left[A + \frac{\langle X - A, d \rangle d}{\|d\|^2} - P \right]$$

Pero como $X \in L'$, $\exists \mu \in \mathbb{R}$ t.q. $X = B + \mu d'$

Orí:

$$X_s = B + \mu d' + 2 \left[A + \frac{\langle B + \mu d' - A, d \rangle d}{\|d\|^2} \right] - 2B - 2\mu d'$$

→ La única variable es μ , separando de los términos constantes:

$$X_s = \underbrace{\left[B + 2A + \frac{2d}{\|d\|^2} \langle B - A, d \rangle - 2B \right]}_{\text{El elemento } C \in \mathbb{R}^3} + \mu \underbrace{\left[d' + \frac{2d}{\|d\|} \langle d', d \rangle - 2d' \right]}_{\text{El elemento } d'' \in \mathbb{R}^3}$$

$$= C + \mu d'' \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ecuación de una recta} \\ \text{cuya ec. vectorial es} \end{array} \right.$$

P.D.: Se pueden reducir términos, pero no es relevante.

Punto Auxiliar 5

P8

$$W = \left\{ A \in M_{nn}(\mathbb{R}) \mid A \text{ es simétrica y } \sum_{i=1}^n a_{ii} = 0 \right\}$$

a) Debemos probar 3 cosas:

- $W \neq \emptyset$

En efecto: basta ver que la matriz llena de 0's está en W .

En general, en este caso siempre se ve que el elemento neutro está en el s.e.v., por definición debe contener al 0 un e.v.

- $W \subseteq M_{nn}(\mathbb{R})$

En efecto: Directo de la definición.

- $\forall A, B \in W, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda A + \mu B \in W$.

En efecto:

- $\lambda A + \mu B$ es simétrica: $(\lambda A + \mu B)^t = (\lambda A)^t + (\mu B)^t$

$$= \lambda A^t + \mu B^t$$

$$= \lambda A + \mu B$$

A y B simétricas
por $A, B \in W$

$$- \sum_{i=1}^n [\lambda A + \mu B]_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda [A]_{ii} + \mu [B]_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^n [A]_{ii} + \mu \sum_{i=1}^n [B]_{ii} = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$$

$$= \lambda \underbrace{\sum_{i=1}^n [A]_{ii}}_{=0} + \mu \underbrace{\sum_{i=1}^n [B]_{ii}}_{=0} \quad \text{pour } A, B \in W$$

$$= 0$$

$\therefore W$ est s.e.v.

6)
1) montrons que $\{A, B, C, D, E\}$ est l.i.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_5 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C + \alpha_4 D + \alpha_5 E = O_{3 \times 3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_5 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & -\alpha_4 - \alpha_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$$

$\therefore \{A, B, C, D, E\}$ est l.i.

2) p.d.a. $W = \langle \{A, B, C, D, E\} \rangle$

En efecto: veamos por doble inclusión:

$\supseteq$ Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_5 \in \mathbb{R}$, hay que ver que
 $\alpha_1 A + \dots + \alpha_5 E \in W$, en efecto:

$$\alpha_1 A + \dots + \alpha_5 E = \begin{pmatrix} \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_5 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & -\alpha_4 - \alpha_5 \end{pmatrix}$$

evidentemente simétrico (sigue igual al transpuesto).

Además:

$$\sum_{i=1}^3 [\alpha_1 A + \dots + \alpha_5 E]_{ii} = \begin{bmatrix} \alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_4 - \alpha_5 \end{bmatrix} \\ = 0$$

$\therefore$ esto en W

$\subseteq$ Debemos ver que todo elemento en W se puede escribir en términos de A, B, C, D y E . En efecto:

$$\text{Sea } M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in W$$

Como $M \in W$:

- $d=b \wedge g=c \wedge h=f$ por ser simétrico

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{i=1}^3 M_{ii} &= 0 \Leftrightarrow a+e+i=0 \\ &\Leftrightarrow i = -a-e \end{aligned}$$

Luego $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & -e-e \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} &= a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= a \cdot D + b \cdot A + c \cdot B + e \cdot E + f \cdot C$$

que es lo que queríamos ver
 $\in \langle \{A, B, C, D, E\} \rangle$

Nota: Si $\langle \{A, B, C, D, E\} \rangle = W$ y $\{A, B, C, D, E\}$ n.l.i., diremos que es base de W .