MA1102-3: Álgebra Lineal
Profesor: Jaime San Martín
Auxiliar: Felipe Hernández Castro

Auxiliar 5 - Preparación C1

22 de octubre de 2018

P1. **[P2 C1 2011-2]**
Sea $B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ invertible tal que satisface la condición $B^3 = 0$. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ se define $M(\lambda) \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ por :

$$M(\lambda) = I + \lambda B + \frac{\lambda^2}{2} B^2$$

(a) Pruebe que: $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}, M(\lambda + \beta) = M(\lambda)M(\beta)$ y deduzca que $M(\beta)M(\lambda) = M(\lambda)M(\beta)$

(b) Pruebe que $M(\lambda)$ es invertible y que $M(\lambda)^{-1} = M(-\lambda)$.

P2. **[P3 C1 2015-2]**

Sea $J \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ la matriz definida por $J_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad j = i+1 \\ 0 & si \quad j \neq i+1 \end{cases}$

a) Probar que la matriz $D = J^2$ satisface:

$$D_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad j = i+2 \\ 0 & si \quad j \neq i+2 \end{cases}$$

b) Usando el resultado anterior demuestre por inducción en k que J^k es la matriz:

$$J^k_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad j = i+k \\ 0 & si \quad j \neq i+k \end{cases}$$

Escriba la matriz J^n.

P3. **[P1 C1 2011-2]**
Considere el siguiente sistema lineal a coeficientes reales:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} -x_1 & & & + & \alpha x_3 & + & \beta x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & \alpha x_3 & + & \beta x_4 & = & 0 \\ \alpha x_1 & + & \beta x_2 & & & & & = & 0 \\ \beta x_1 & + & \beta x_2 & + & \alpha x_3 & & & = & 0 \end{array}$$

Determine las condiciones sobre los parámetros reales α y β que garanticen que el sistema tenga una única solución.

P4. **[P3 C1 2014-1]**
Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Calcule mediante el método de Gauss la inversa de A.

P5. **[P1 C2 2014-1]** Sea $L_1 : \begin{pmatrix}1\\5\\4\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

a) Hallar la ecuación vectorial de la recta L_2 tal que intersecta perpendicularmente a L_1 y contiene al punto $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$. Calcular la distancia entre L_2 y el punto $\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$.

b) Hallar la ecuación normal del plano Π que contiene a las rectas L_1 y L_2.

P6. **[P1 C2 2014-1]**

a) Encontrar la ecuación vectorial del plano Π_1 que contiene a los puntos $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}$.

b) Sea L la recta de ecuación $L : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$. Encontrar las coordenadas de $P = \Pi_1 \cap L$.

c) Hallar la ecuación del plano Π_2 que es paralelo a Π_1 y cumple que $d(P, Q) = 9$, donde $Q = \Pi_2 \cap L$.

P7. **[P1 C2 2013-2]**

a) Sea $P \in \mathbb{R}^3$ un punto y L una recta de vector posición A y vector director d ($P \notin L$). Determine el punto Q, simétrico de P con respecto a L.

b) Considere las rectas $L : x = A + \lambda d$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $L' : x = B + \mu d'$, $\mu \in \mathbb{R}$. Demuestre que el conjunto de puntos simétricos de cada punto de L' con respecto a L es una recta y determine su ecuación vectorial.

P8. **[P3 C1 2009-2]**
Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ y W definido por

$$W = \{A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) | A \text{ es simétrica y } \sum_{i=0}^{n} a_{ii} = 0\}$$

a) Probar que W es s.e.v. de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

b) Considere el caso $n = 3$ y las matrices de $\mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

1) Pruebe que $\{A, B, C, D, E\}$ es l.i.
2) Pruebe que $W = \langle\{A, B, C, D, E\}\rangle$