Pauta Auxiliar 3

P1) $L_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$

$$L_2 : \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases} \quad (\star)$$

(i) Para conocer $L_1 \cap L_2$, es más cómodo hacerlo vectorialmente, por ende pasemos L_2 a su forma vectorial

Si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in L_2$ entonces $x - z - 1 = 0 \ \wedge \ y + z - 2 = 0$

$\iff \quad x = z + 1 \ \wedge \ y = 2 - z$.

Luego reemplazando:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z + 1 \\ 2 - z \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Vector Posición}} + z \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{vector director}}$$

Luego $L_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

• Ahora veamos que $L_1 \cap L_2 \subseteq \emptyset$ $\left(\Leftrightarrow L_1 \cap L_2 = \phi \right)$

Sea $v \in L_1 \cap L_2$, luego $\exists\, t \in \mathbb{R} \wedge \exists\, z \in \mathbb{R}$ tales que:

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix}$$

- Por fila 3 : $t = z$
- Por fila 2 : $t = 1 - z$
- Por fila 1 : $t = 1 + z$

$$\left.\begin{array}{l} t = 1 - z \\ t = 1 + z \end{array}\right\} \text{sumando} \quad 2t = 2 \Rightarrow t = 1$$

Luego por fila 3 $z = t = 1$, pero entonces según – por ejemplo – fila 2, $t = 1 - 1 = 0$

Contradicción! las filas son incompatibles entre sí.

Por ende $\nexists\, v \in L_1 \cap L_2 \Rightarrow L_1 \cap L_2 = \phi$

(ii) ¿ Cartesiana o vectorial es más fácil?

En general es mejor vectorial. Para encontrar la ecuación vectorial de un plano, necesitamos 2 vectores directores y 1 de posición. Como el plano contiene a L_1 :

- $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \Pi$ } Plano] Llamemosla $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es vector director del plano. } $d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Por ende solo nos falta un vector director. Para eso usamos que $\Pi \parallel L_2$, luego el vector director de L_2 será director de Π y nos servirá siempre y cuando no sea colineal con d_1 (lo cual no ocurre.), pues de lo contrario sería la misma dirección (y necesitamos que los directores apunten en direcciones diferentes!) ∴

Llamamos:

$$d_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\Pi : P + \lambda_1 d_1 + \lambda_2 \cdot d_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para pasar de vectorial a cartesiana, nosotros tenemos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3 ecuaciones con x, y, z, λ_1 y λ_2

y queremos llegar a algo del tipo:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad A, B, C, D \in \mathbb{R}$$

1 ecuación con x, y z

$\therefore$ debemos eliminar λ_1 y λ_2:

- $x = 0 + \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_2$ (1)
- $y = 1 + \lambda_1 - \lambda_2$ (2)
- $z = 0 + \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_2$ (3)

Usamos – por ejemplo – (1) para despejar λ_1:

$\lambda_1 = x - \lambda_2$. Luego:

- $y = 1 + x - 2\lambda_2$ (4)
- $z = x$ (5)

Donde vemos que (4) ya no nos sirve, pues en (5) ya llegamos a la expresión deseada, con:

$$A = -1 \wedge B = D = 0 \wedge C = 1$$

$\therefore$ $x = z$ (o $z = x$) es la ecuación del plano

($\Leftrightarrow$ $z - x = 0$)

¿Cómo paso de cartesiana a vectorial?

es más fácil!

↳

- De cartesiana se despeja una variable:

$x = z$

- Luego se reemplaza en $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$:

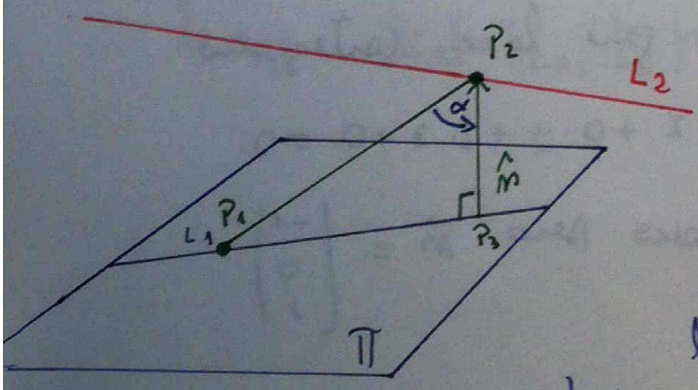
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z\\y\\z\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}} + \underbrace{y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}$$

los términos constantes se agrupan en el posición

y los con variables se separan y forman los directores.

(iii) Es importante notar que $\text{dist}(L_1, L_2) = \text{dist}(\tilde{\Pi}, L_2)$ pues $L_1 \subseteq \tilde{\Pi}$.

Notar que si tomamos un punto de L_2 y otro de L_1 (P_2 y P_1) siempre podemos proyectar el trazo $\overline{P_2P_1}$ sobre el vector normal al plano $\hat{n}$ de manera que $\overline{P_2P_3}$ es la distancia buscada, con $P_3 \in \tilde{\Pi}$ (P_3 representa la proyección de P_2 en $\tilde{\Pi}$)



Nota que si llamamos α al angulo entre $\overline{P_1P_2}$ y $\overline{P_2P_3}$, se tiene que:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{P_2P_3}}{\overline{P_1P_2}} \Rightarrow \overline{P_1P_2}\cdot\cos\alpha = \overline{P_2P_3}$$

* Nota que $\overline{P_1P_2} = \|P_1 - P_2\| \wedge \overline{P_2P_3} = \|P_2 - P_3\|$

$$\Rightarrow \underbrace{\|P_1 - P_2\|\cdot\cos\alpha}_{} = \|P_2 - P_3\| = dist(L_1, L_2)$$

Nota que se parece mucho al producto punto!, en este caso entre $(P_1 - P_2)$ y un vector que forme un angulo α con $(P_1 - P_2)$.

¿Que vector forma tal angulo α?

El vector normal al plano!

Si $\vec{n}$ es normal al plano, tendriamos que:

$$\langle P_1 - P_2, \vec{n}\rangle = \|P_1 - P_2\|\cdot\|\vec{n}\|\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \left\langle P_1 - P_2, \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right\rangle = \|P_1 - P_2\|\cos\alpha = dist(L_1, L_2)$$

¿Cuanto vale $\vec{n}$? Recordemos que la ec. cartesiana es: $z - x = 0 \Leftrightarrow (-1)x + 0\cdot y + 1\cdot z + 0 = 0$

Luego un vector normal al plano sera $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Recordatorio: Si la ec. cartesiana es $Ax + By + Cz + D = 0$

entonces $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ es vector normal al plano.

Tenemos $\vec{n}$! pero ¿sabemos si apunta donde queremos? a priori no, pero si apuntase hacia el otro lado del plano, solo variaría en que $\| P_1 - P_2 \| \cos\alpha$ quedaría negativo (por $\cos\alpha$ lo sería) por ende solo bastaría tomar modulo! Calculemos:

Tomemos $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ } vectores Posiciones por ejemplo

$$\langle P_1 - P_2 , \frac{\hat{n}}{\|\hat{n}\|} \rangle$$

$$= \langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2}} \rangle$$

$$= \langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= (1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$$

Luego $\text{dist}(L_1, L_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Pauta Auxiliar 3

P2

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Pi : \; x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

a) Teniendo la ecuación cartesiana de Π es fácil proceder:

1) Se despeja una variable: $x_1 = x_2 + 1 - x_3$

2) se reemplaza en $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + 1 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_3$$

Listo! $\Pi : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Tenemos 2 datos: $P \in L \wedge L \perp \Pi$

- Con $P \in L$ tenemos un vector posición
- Con $L \perp \Pi$ tenemos dirección! debemos encontrar un vector normal al plano. Como la ecuación cartesiana es: $x_1 - x_2 + x_3 - 1 = 0$ un vector normal sería:

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Luego $L : P + \lambda \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

notar que para $\lambda = -1$ obtenemos que $O \in L$,
es decir L pasa por O.

Pauta Auxiliar 3

P3

- $\Pi : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad s, t \in \mathbb{R}$

- $L : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ c \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Sea $\vec{x} \in \Pi \cap L$ (con $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$)

Luego: $\exists s, t \in \mathbb{R}$ tales que: $\longrightarrow$ (a menos que $\Pi \cap L = \emptyset$)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que: $\longrightarrow$ (a menos que $\Pi \cap L = \emptyset$)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$$

Así:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -a \\ -1 \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Scanned by CamScanner

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

.O. Es un sistema de ecuaciones!

escalonamos:

$$\xrightarrow{E_{23}(-1)\ E_{13}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a-c+1 & 1 \end{array}\right)$$

- Luego $\exists!$ solución si $a-c+1 \neq 0$
- Si $c = a+1$ tendríamos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Sistema siempre incompatible! pues $1 \neq 0$ (fila 3)

$\therefore$ solo hay 2 opciones:

- $a-c+1 \neq 0 \Rightarrow$ Solución única
- $a-c+1 = 0 \Rightarrow \nexists$ solución

¿Como interpretarlo?

· Si hay único solución del sistema, significa que existe un único $\vec{x}$ en el conjunto $\Pi \cap L$. Luego Π y L se intersectan en un punto si $a - c + 1 \neq 0$

· Si $\nexists$ solución del sistema, no existe $\vec{x}$ en $\Pi \cap L$ o sea $\Pi \cap L = \emptyset$, luego Π y L no se intersectan.

$\therefore$ respondiendo al problema:

- Si $a - c + 1 \neq 0 \Rightarrow \Pi \cap L \neq \emptyset$

- no existe caso donde $\Pi \cap L = L$, pues o se intersectan en un punto o no se intersectan.

Pauta Auxiliar 3

P4

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Un plano esta definido por 3 puntos no colineales, por ende encontremos la ecuacion del plano que contiene a los puntos P, Q y R. Luego veamos que S tambien esta en tal plano.

Consideremos:

- P vector posición
- $d_1 = P - Q$ es un vector director del plano
- $d_2 = R - Q$ es un vector director del plano

Asi, tenemos que:

$$\Pi_{P,d_1,d_2} : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ Ec. vectorial del plano

Ahora verifiquemos que $S \in \Pi_{P,d_1,d_2}$. Para eso deberíamos verificar que:

$$\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esto a priori consiste resolver el sistema con λ_2 y λ_3 como incognitas (metodo Propuesto!). Pero para verificar que un punto esta en un plano, el metodo más rapido es con la ecuación cartesiana y justo se nos pide encontrarla tambien.

Encontremosla:

Nota: Se podria encontrar buscando el vector normal al plano ($\vec{n} = d_1 \times d_2$) pero para eso se necesita producto cruz, aún no visto en clases.

Si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Pi$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 5\lambda_1 + 3\lambda_2 & (1) \\ y = 1 + 7\lambda_1 + 3\lambda_2 & (2) \\ z = 4 + 3\lambda_1 + \lambda_2 & (3) \end{cases}$$

Usando (3): $\lambda_2 = z - 4 - 3\lambda_1$, reemplazando:

$$\begin{cases} x = 2 + 5\lambda_1 + 3(z - 4 - 3\lambda_1) \\ y = 1 + 7\lambda_1 + 3(z - 4 - 3\lambda_1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = -10 - 4\lambda_1 + 3z & (4) \\ y = -11 - 2\lambda_1 + 3z & (5) \end{cases}$$

Por (5): $2\lambda_1 = -11 + 3z - y$

Luego en (4):

$$\{ x = -10 - 2\cdot(-11 + 3z - y) + 3z$$

$$= 12 - 3z + 2y$$

$\therefore$ La ec. cartesiana es: $\boxed{x - 2y + 3z - 12 = 0}$

veamos que $S \in \Pi_{p,d_1,d_2}$: reemplazamos en

$$\underbrace{7}_{x} - \underbrace{2\cdot(-1)}_{2y} + \underbrace{3\cdot(1)}_{3z} \underbrace{- 12}_{-12} = 7 + 2 + 3 - 12 = 0$$

Luego efectivamente $S \in \Pi_{p,d_1,d_2}$.

Ahora solo basta encontrar la ec. normal.

Como la ec. Cartesiana es: $x-2y+3z-12=0$

Un vector normal es $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

y Como $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ era posición, la ecuación

normal será:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

Pauta Auxiliar 3

P5 | $A = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \|P - x\| = \|Q - x\| \}$

P.D.Q. A es un plano (y encontrar su ec. normal)

- Notar que A está definido por $\|P - x\| = \|Q - x\|$ una relación entre normas, mientras que la ecuación normal está definido por: $\langle x - v, n \rangle = 0$ (con v posición en el plano y n un normal a este), la cual es una relación de producto interno ¿Existe alguna manera de relacionar norma con producto interno? Claro! notar que:

- $\|P - x\| = \|Q - x\|$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\langle P - x, P - x \rangle} = \sqrt{\langle Q - x, Q - x \rangle}$$

$$\Leftrightarrow \langle P - x, P - x \rangle = \langle Q - x, Q - x \rangle$$

↳ la idea es llevar esto a la forma $\langle x - v, n \rangle = 0$
Desarrollemos un poco lo anterior:

$$\Leftrightarrow \langle P, P \rangle - 2\langle P, x \rangle + \langle x, x \rangle$$
$$= \langle Q, Q \rangle - 2\langle Q, x \rangle + \langle x, x \rangle$$

$\Leftrightarrow \quad \langle P,P\rangle - 2\langle P,x\rangle = \langle Q,Q\rangle - 2\langle Q,x\rangle$

$\Leftrightarrow \quad 2\overbrace{\langle x, Q-P\rangle}^{\langle x,Q\rangle - \langle x,P\rangle} + \langle P,P\rangle - \langle Q,Q\rangle = 0$

$\Leftrightarrow \quad \langle x, Q-P\rangle + \frac{1}{2}\left(\langle P,P\rangle - \langle Q,Q\rangle\right) = 0 \quad (\star)$

Uff! Ya estamos cerca de $\langle x-v, n\rangle = 0$,

Pero $\langle P,P\rangle - \langle Q,Q\rangle$ está molestando,

nos gustaría pasarlo a un solo producto punto.

Idea: Imaginemos que P y Q son números, tenemos que:

$$\langle P,P\rangle - \langle Q,Q\rangle = P\cdot P - Q\cdot Q = P^2 - Q^2$$
$$= (P-Q)(P+Q)$$
$$= \langle P-Q, P+Q\rangle$$
$$= -\langle P+Q, Q-P\rangle$$

Oh! nos aparece un $Q-P$, lo cual permitiría sumar con $\langle x, Q-P\rangle$. Entonces, la idea es demostrar tal igualdad.

Es más fácil destruir que crear, por ende llevemos
$-\langle P+Q, Q-P\rangle$ a $\langle P,P\rangle - \langle Q,Q\rangle$:

$$-\langle P+Q, Q-P\rangle = \langle P+Q, P-Q\rangle$$

$$= \langle P,P\rangle + \langle P,-Q\rangle + \langle Q,P\rangle + \langle Q,-Q\rangle$$

$$= \langle P,P\rangle - \underbrace{\langle P,Q\rangle + \langle Q,P\rangle}_{=0} - \langle Q,Q\rangle$$

$$= \langle P,P\rangle - \langle Q,Q\rangle$$

Así :

$$(\star) \iff \langle x, Q-P\rangle - \frac{1}{2}\langle P+Q, Q-P\rangle = 0$$

$$\iff \langle x, Q-P\rangle + \langle -\tfrac{1}{2}(P+Q), Q-P\rangle = 0$$

$$\iff \boxed{\langle x - \tfrac{1}{2}(P+Q), Q-P\rangle = 0}$$

ecuación normal con $v = \frac{1}{2}(P+Q)$

$\wedge\ n = (Q-P)$