MA1102-3: Álgebra Lineal
Profesor: Jaime San Martín
Auxiliar: Felipe Hernández Castro

Auxiliar 3 - Geometría I

8 de Octubre de 2018

Resumen

- **[Recta]**: Sean p, $d \in \mathbb{R}^n$, llamaremos recta al conjunto L dado por:
$$L_{p,d} = \{v \in \mathbb{R}^n | v = p + \alpha d, \alpha \in \mathbb{R}\}$$
- **[Vectores paralelos]**: Sean v, $w \in \mathbb{R}^n$, diremos que son paralelos ($x \parallel y$) si $\exists \lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ tal que $v = \lambda w$
- **[Plano]** Sean p, d_1, $d_2 \in \mathbb{R}^n$, llamaremos plano al conjunto Π dado por:
$$\Pi_{p,d_1,d_2} = \{v \in \mathbb{R}^n | v = p + \alpha d_1 + \beta d_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$
- **[Producto punto en $\mathbb{R}^n$]** Dados x, $y \in \mathbb{R}^n$ se define el producto punto $\langle x, y \rangle$ como:
$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^t y = y^t x$$
- **[Norma Euclidiana $\| \cdot \|$]** Dado $x \in \mathbb{R}^n$ define la norma euclidiana como $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\langle x, x \rangle}$
- **[Vectores ortogonales]** Sean v, $w \in \mathbb{R}^n$, diremos que son ortogonales ($x \perp y$) si $\langle v, w \rangle = 0$
- **[Desigualdad Cauchy-Schwartz]** Sean x, $y \in \mathbb{R}^n$, entonces $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|$, en donde la igualdad se da solo si $(x = 0) \vee (y = 0) \vee (x \parallel y)$

P1. **[C1 2009-2]** Dadas las rectas L_1 y L_2 definidas por:

$$L_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad L_2 : \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Se pide:

(i) Demostrar que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.

(ii) Deducir la ecuación cartesiana y vectorial del plano que contiene a L_1 y es paralelo a L_2.

(iii) Encontrar la distancia entre las rectas L_1 y L_2.

P2. Sea $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y Π el plano de ecuación cartesiana $x_1 - x_2 + x_3 = 1$.

a) Encuentre la ecuación vectorial de Π.

b) Encuentre la ecuación vectorial de la recta L que pasa por P y es ortogonal a Π. Pruebe que L pasa por el origen.

P3. **[C1 2012-2]** Considere el plano:

$$\Pi : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

y la recta

$$L : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ c \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

donde a y c son parámetros. Encuentre condiciones sobre los parámetros a y c para que $\Pi \cap L \neq \emptyset$. ¿Existe algún caso en que $\Pi \cap L = L$?

P4. Demuestre que los siguientes puntos son coplanares, y encuentre la ecuación vectorial, cartesiana y normal del plano que los contiene.

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

P5. Sean $P, Q \in \mathbb{R}^3$ puntos distintos, y A el conjunto definido por:

$$A = \{x \in \mathbb{R}^3 : ||P - x|| = ||Q - x||\}$$

Demuestre que A es un plano y encuentre su ecuación normal.