Pauta Auxiliar 2

P1 • Matricialmente el sistema se expresa como:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3-\alpha & \alpha \\ 1 & 1 & 0 & \beta+\alpha+3 & \beta \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 2(\alpha+\beta) \end{array}\right)}_{\text{Matriz expandida del sistema} \quad (A|b)}$$

• Así, procedemos a escalonar:

$$\xrightarrow{E_{12}(-1)\cdot E_{13}(-1)\cdot E_{14}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha & \alpha-1 \\ 0 & -1 & -1 & \beta+\alpha & \beta-1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2(\alpha+\beta)-1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_{23}(1)\cdot E_{24}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha & \alpha-1 \\ 0 & 0 & -1 & \beta & \alpha+\beta-2 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \alpha+2\beta \end{array}\right)$$

• Luego, analizamos fila por fila partiendo de la última:

- fila 4

la fila 4 nos dice que $0 = \beta - 2$

• Luego si $\beta \neq 2$ el sistema es incompatible y no hay solución.

• Si $\beta = 2$ no podemos todavía asegurar ∞ soluciones, tenemos que revisar fila por fila.

$\therefore$ de ahora en adelante veremos el caso $\boxed{\beta = 2}$

- fila 3

Observación: Como la fila 4 no nos entrega un valor para x_4, diremos que esta variable está libre, y asumiremos su valor como "conocido" (puede tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$)

la fila 3 nos dice que: $-x_3 + 2x_4 = -2$

$$\Rightarrow \quad x_3 = 2x_4 + 2$$

$$\xrightarrow{E_{34}(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha & \alpha-1 \\ 0 & 0 & -1 & \beta & \alpha+\beta-2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+\beta & 2\alpha+3\beta-2 \end{array}\right)$$

- Siempre vemos el caso de solución única primero:

$\exists!$ solución $\Leftrightarrow$ los pivotes son no nulos.

- En este caso tenemos que hay solución única si

$\alpha+\beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq -\beta$

$\therefore$ existe solución única si $\alpha \in \mathbb{R} \wedge \beta \neq -\alpha$

- Después de ver el caso de solución única nos ponemos en todos los demás casos:

¿Qué pasa si $\alpha = -\beta$? nuestro sistema quedaría:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \beta & -\beta-1 \\ 0 & 0 & -1 & \beta & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta-2 \end{array}\right)$$

- Luego como pudimos despejar la variable x_3, la fila 3 es compatible, con $x_3 = 2x_4 + 2$

- fila 2

Esto nos dice:

$$x_2 + 2x_4 = -2 - 1 = -3$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = -3 - 2x_4$$

$\therefore$ fila 2 compatible

- fila 1

Esto nos dice:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4$$

$$= 1 - 2(-3 - 2x_4) - 2x_4 - 2 - 3x_4$$

$$= 1 + 6 + 4x_4 - 5x_4 - 2$$

$$= 5 - x_4 \quad \Rightarrow \text{fila 1 compatible}$$

Luego el sistema es compatible, y existen ∞ soluciones dadas por:

$x_1 = 5 - x_4$

$x_2 = -3 - 2x_4$

$x_3 = 2x_4 + 2$

x_4 libre

En resumen:

- $\exists!$ sol. si $\alpha \neq -\beta$
- $\nexists$ sol si $\alpha = -\beta \wedge \beta \neq 2$
- $\exists \infty$ sol. si $\alpha = -\beta = -2$

6) Si $\alpha = -2$
$\beta = 2$

Tenemos que $\alpha = -\beta = -2$

Luego $\exists \infty$ soluciones, en particular dadas por:

$x_1 = 5 - x_4$

$x_2 = -3 - 2x_4$

$x_3 = 2x_4 + 2$

x_4 libre

Pauta Auxiliar 2

P2

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Para encontrar la inversa de A, hay que resolver el sistema matricial: $A B = I$

- Primero escribimos la matriz ampliada del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Luego escalonamos:

$$\xrightarrow{E_{13}(1) \cdot E_{12}(1) \cdot} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- A diferencia de los sistemas $Ax = b$ donde la incógnita era un vector, hay que seguir escalonando hacia arriba:

$$\xrightarrow{E_{32}(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_{21}(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 7 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\tilde{A}}$$

- Luego para que $\tilde{A} = I$, multiplicamos las filas de la matriz ampliada usando matrices del tipo $E_{pp}(\lambda)$ (ver resumen Anexo 1)

$$\xrightarrow{E_{22}(-1)\cdot E_{11}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

• Así, llevamos el sistema $AB = I$ a un sistema $\tilde{A}B = C$ cuyo matriz expandida es:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{\tilde{A}} \qquad \underbrace{}_{C}$$

Con $\tilde{A} = I$, así $\tilde{A} \cdot B = I \cdot B = B$

$$\Rightarrow B = C = \underbrace{\begin{pmatrix} -7 & -2 & -4 \\ -3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{inversa de } A \text{ pues } A \cdot B = I}$$

Pauta Aux 3

P3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & \alpha \end{pmatrix}$$

• ¿Para qué valores de α, A es invertible?
Usemos la propiedad 2 del resumen, en particular que 1. $\Leftrightarrow$ 3. Para aquello, necesitamos escalonar A!

$$\xrightarrow{E_{14}(1/2)\cdot E_{13}(-2)\cdot} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -13 & 2 & -6 \\ 0 & \frac{21}{2} & -\frac{5}{2} & \alpha+2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{24}(-\frac{21}{2})\cdot E_{23}(13)} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 20 \\ 0 & 0 & -5/2 & \alpha-19 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{34}\left(\frac{5}{4}\right)} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+6 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}}$$

Luego A es invertible sii los pivotes de $\tilde{A}$ son no nulos, o sea $\alpha \neq -6 \iff A$ invertible

• Para encontrar la descomposición LDU, notemos que:

$$\tilde{A} = E_{34}\left(\frac{5}{4}\right) \cdot E_{24}\left(-\frac{21}{2}\right) \cdot E_{23}(13) \cdot E_{14}(1/2) E_{13}(-2) A$$

$\Rightarrow$

$$A = E_{13}(-2)^{-1} \cdot E_{14}(1/2)^{-1} \cdot E_{23}(13)^{-1} \cdot E_{24}\left(-\frac{21}{2}\right)^{-1} \cdot E_{34}\left(\frac{5}{4}\right)^{-1} \tilde{A}$$

$$= \underbrace{E_{13}(2) \cdot E_{14}\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot E_{23}(-13) \cdot E_{24}\left(\frac{21}{2}\right) \cdot E_{34}\left(-\frac{5}{4}\right)}_{L} \tilde{A}$$

¿Cuanto vale L?

Para calcular L notar que:

$$E_{34}\left(-\frac{5}{4}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

Luego, las otras matrices solo suman y ponderan filas de $E_{34}\left(-\frac{5}{4}\right)$:

- $$E_{24}\left(\frac{21}{2}\right) \cdot E_{34}\left(-\frac{5}{4}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{21}{2} & -\frac{5}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{24}\left(\frac{21}{2}\right)$ toma la fila 2 de $E_{34}\left(-\frac{5}{4}\right)$, la multiplica por $\frac{21}{2}$ y se la suma a la fila 4

- $$E_{23}(-13) \cdot E_{24}\left(\frac{21}{2}\right) \cdot E_{34}\left(-\frac{5}{4}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{21}{2} & -\frac{5}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

- $$E_{14} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot E_{23}(-13) \cdot E_{24}\left(\frac{21}{2}\right) \cdot E_{34}\left(-\frac{5}{4}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{21}{2} & -\frac{5}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

finalmente:

$$L = E_{13}(2) \cdot E_{14}\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot E_{23}(-13) \cdot E_{24}\left(\frac{21}{2}\right) \cdot E_{34}\left(-\frac{5}{4}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -13 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{21}{2} & -\frac{5}{4} & 1 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Obs: Como escalonamos sin permutar filas, L la podríamos determinar agregandole terminos a la identidad por cada matriz $E_{pf}(\lambda)$ ponderado, en donde se agrega un λ al termino columna p y fila f (como se ve en (*))

luego $$A = \underbrace{L}_{\Delta\text{-inferior}} \tilde{A} \rightarrow \Delta\text{-superior} \qquad (1)$$

Esta descomposición se llama LU

Para encontrar la descomposición L D U se aplica transpuesta a la ecuación (1):

$$A^t = \tilde{A}^t L^t \qquad (2)$$

Así, $\tilde{A}^t$ es Δ- inferior, por ende lo podemos volver a escalonar:

$$\tilde{A}^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 20 & \alpha+6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{14}(-2) E_{13}(-\frac{1}{2}) \cdot E_{12}(-\frac{7}{2}) \cdot} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 20 & \alpha+6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{34}(-10) \cdot E_{24}(-2) \cdot} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+6 \end{pmatrix}}_{\tilde{\tilde{A}}}$$

Luego, tenemos que:

$$\tilde{\tilde{A}} = E_{24}(-2) \cdot E_{34}(-10) \cdot E_{12}\left(-\frac{7}{2}\right) \cdot E_{13}\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot E_{14}(-2)\, \tilde{A}^t$$

$$\Rightarrow \tilde{A}^t = \underbrace{E_{14}(-2)^{-1} E_{13}\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot E_{12}\left(-\frac{7}{2}\right)^{-1} \cdot E_{34}(-10)^{-1} \cdot E_{24}(-2)^{-1}}_{\text{llamemoslo } U^t} \tilde{\tilde{A}}$$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow \quad \tilde{A}^t = \underbrace{E_{14}(2)\cdot E_{13}\left(\tfrac{1}{2}\right)\cdot E_{12}\left(\tfrac{7}{2}\right)\cdot E_{34}(10)\cdot E_{24}(2)}_{U^t}\,\tilde{\tilde{A}}$$

Donde:

$$U^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

luego $\tilde{A}^t = U^t\,\tilde{\tilde{A}}$

Volviendo a (2):

$$A^t = \tilde{A}^t L^t = U^t \tilde{\tilde{A}} L^t$$

Aplicando traspuesto:

$$A = L\,\tilde{\tilde{A}}^t\,U = L\,D\,U$$

En donde:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -13 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{21}{2} & -\frac{5}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

Scanned by CamScanner

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha + 6 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 7/2 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

P4

Pauta Auxiliar 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ -1 & -4 & 0 \\ -1 & -8 & -9 \end{pmatrix}$$

Para encontrar la descomposición LU escalonamos:

$$\xrightarrow{E_{13}(1)\cdot E_{12}(1)\cdot} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{23}(1)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}}$$

luego:

$$\tilde{A} = E_{23}(1)\, E_{12}(1)\cdot E_{13}(1)\cdot A$$

$$\Rightarrow A = E_{13}(1)^{-1}\cdot E_{12}(1)^{-1}\cdot E_{23}(1)^{-1}\,\tilde{A}$$

$$= \underbrace{E_{13}(-1)\cdot E_{12}(-1)\cdot E_{23}(-1)}_{L}\,\underbrace{\tilde{A}}_{U}$$

Si llamamos $U = \tilde{A}$ y $L = E_{13}(-1) \cdot E_{12}(-1) \cdot E_{23}(-1)$ tenemos la descomposición buscada:

$$A = LU$$

Con $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Así, el sistema $Ax = b$ se escribe: $LUx = b$

Si usamos la indicación: $y = Ux$, tenemos el sistema:

$$Ly = b \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

- por fila 1 : $y_1 = 1$
- por fila 2 : $-y_1 + y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = y_1 = 1$
- por fila 3 : $-y_1 - y_2 + y_3 = -2$

$$\iff -2 + y_3 = -2 \iff y_3 = 0$$

Luego $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ahora, para encontrar x resolvemos: $Ux = y$ luego matriz ampliada es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

- por fila 3 : $3 \cdot x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$
- por fila 2 : $2 \cdot x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 1/2$
- por fila : $x_1 + 6 \cdot x_2 = 1$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 + 3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -2$$

luego $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

P5)

Parte Aux 2

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & 2 & 0 & 1 \\ \alpha & -3 & 2 & -1 \\ \alpha & -2 & -1 & 1 \\ 2\alpha & -2 & -4 & \beta \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ \alpha+\beta+2 \end{pmatrix}$$

La matriz expandida de $Ax=b$ es:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -\alpha & 2 & 0 & 1 & 1 \\ \alpha & -3 & 2 & -1 & -2 \\ \alpha & -2 & -1 & 1 & -1 \\ 2\alpha & -2 & -4 & \beta & \alpha+\beta+2 \end{array}\right)$$

Escalonando:

$$\xrightarrow{E_{14}(2)E_{13}(1)\ E_{12}(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} -\alpha & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & \beta+2 & \alpha+\beta+4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_{24}(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} -\alpha & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta+2 & \alpha+\beta+2 \end{array}\right)$$

Como siempre, vemos el caso de solución única primero:

pivotes no nulos $\Leftrightarrow \exists !$ sol.

$\therefore$ $\left.\begin{array}{l}\beta \neq -2 \\ \wedge\ \alpha \neq 0\end{array}\right\}$ para que halla sol única.

Otros casos:

- Si $\beta = -2 \ \wedge\ \alpha \neq 0$

tenemos que por cuarta fila $\quad 0\, x_4 = \alpha$

$$\Leftrightarrow \ 0 = \alpha \qquad \overset{///}{\underset{/\backslash\backslash}{\cancel{\times}}}$$

$\therefore \nexists$ solución.

OJO todavía no lo sabemos con certeza

- Si $\beta = -2 \ \wedge\ \alpha = 0$

- la fila 4 queda compatible ✓ y x_4 queda libre*.

Para ver si $\exists \infty$ sol., hay que revisar las demás filas:

· fila 3: $\quad -x_3 + 2x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = 2x_4$ ✓ compatible.

- fila 2 $\quad -x_2 + 2x_3 = -1 \Rightarrow x_2 = 2x_3 + 1$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 4x_4 + 1$ ✓

Fila 1 $\quad 2x_2 + x_4 = 1$

$$\Rightarrow \quad x_2 = \frac{1 - x_4}{2}$$

¿Compatible?

Por fila 2 $\quad x_2 = 4x_4 + 1$

$$\Rightarrow \quad 4x_4 + 1 = \frac{1 - x_4}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 8x_4 + 2 = 1 - x_4$$

$$\Rightarrow \quad 9x_4 = -1 \quad \Rightarrow \quad x_4 = -1/9$$

$\therefore$ x_4 realmente no estaba libre*, pues como $\alpha = 0$, x_1 queda libre y eso provoca que se determine el valor de x_1. Luego las soluciones (∞) son:

x_1 libre

$x_2 = 4x_4 + 1 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{9} + 1\right)$

$x_3 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)$

$x_4 = -\frac{1}{9}$

• si $\beta \neq -2 \wedge \alpha = 0$: el sistema sería:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta+2 & \beta+2 \end{array}\right)$$

• por fila 4: $x_4 = 1$

• por fila 3: $-x_3 + 2x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = 2$

• por fila 2: $-x_2 + 2x_3 = -1 \Rightarrow x_2 = 1 + 2x_3 = 5$

• por fila 1: $2x_2 + x_4 = 1 \Rightarrow x_2 = \dfrac{1-x_4}{2} = 0$

pero la fila 2 decía $x_2 = 5 \neq 0$

luego la fila 1 es incompatible con la 2 y el sistema -por ende- no tiene solución.

En resumen:

$\exists!$ sol si: $\beta \neq -2 \wedge \alpha \neq 0$

$\exists \infty$ sol si: $\beta = -2 \wedge \alpha = 0$

$\nexists$ sol si: $(\beta \neq -2 \wedge \alpha = 0) \vee (\beta = -2 \wedge \alpha \neq 0)$

Ouelo:

Si $\beta \neq -2 \wedge \alpha \neq 0$ encontremos las soluciones:

Advertencia! Puro matraco :(

- fila 4:

$$x_4(\beta+2) = \alpha+\beta+2 \Rightarrow \boxed{x_4 = \frac{\alpha+\beta+2}{\beta+2}}$$

- fila 3:

$$-x_3 + 2x_4 = 0 \Rightarrow \boxed{x_3 = 2x_4 = \frac{2(\alpha+\beta+2)}{\beta+2}}$$

- fila 2:

$$-x_2 + 2x_3 = -1 \Rightarrow x_2 = 2x_3 + 1$$

$$= 2\left(\frac{2(\alpha+\beta+2)}{\beta+2}\right) + 1$$

- fila 1: $-\alpha x_1 + 2x_2 + x_4 = 1$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2x_2 + x_4 - 1}{\alpha}$$

$$= \left(2 \cdot \frac{4(\alpha+\beta+2)}{\beta+2} + 1 + \frac{(\alpha+\beta+2)}{\beta+2} - 1\right)\frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \left[x_1 = \left(\frac{9}{\alpha} \frac{(\alpha+\beta+2)}{\beta+2} \right) \right]$$

Luego:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \left(\frac{\alpha+\beta+2}{\beta+2} \right) \begin{pmatrix} 9/\alpha \\ 2^2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \frac{(\alpha+\beta+2)}{\beta+2} \begin{pmatrix} 9/\alpha \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$