Punto propuestos Aux 1

P2-c) P.D.Q. $\underbrace{A^{-1}}_{=B}$ es Δ-inf $\wedge$ $(A^{-1})_{ii} = (A)_{ii}^{-1}$

En efecto:

Usemos inducción sobre las filas.

- Caso base: En U-cursos (indicaciones propuestos)
- Hipótesis: Dado $i < n$, se tiene que:

$$\forall s \underbrace{\in \{1, \dots, i\}}_{s \leq i} \quad B_{ss} = A_{ss}^{-1} \quad y \quad B_{sj} = 0 \quad \forall j \underbrace{\in \{s+1, \dots, n\}}_{j \geq s+1 \iff j > s}$$

- Caso inductivo:

P.D.Q. $B_{(i+1)(i+1)} = A^{-1}_{(i+1)(i+1)} \wedge B_{(i+1)j} = 0 \quad \forall j \in \underbrace{\{i+2, \dots, n\}}_{j > i+1}$

En efecto:

$$(AB)_{(i+1)(i+1)} = \sum_{k=1}^{n} A_{(i+1)k} \cdot B_{k(i+1)}$$

Pero como A es Δ-inferior $A_{(i+1)k} = 0 \quad \forall k > i+1$

$$\therefore = \sum_{\substack{k=1 \\ k \leq i+1}}^{n} A_{(i+1)k} \, B_{k(i+1)}$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ k<i+1}}^{n} A_{(i+1)k} \cdot B_{k(i+1)} + A_{(i+1)(i+1)} \cdot B_{(i+1)(i+1)}$$

Pero además $(AB)_{(i+1)(i+1)} = I_{(i+1)(i+1)} = 1$

$$\Rightarrow \underbrace{\left[\sum_{\substack{k=1 \\ k<i+1}}^{m} A_{(i+1)k} \cdot B_{k(i+1)} \right]} + A_{(i+1)(i+1)} \cdot B_{(i+1)(i+1)} = 1$$

Si esto $= 0$ estamos listos ¿cómo probarlo?
¡Aún no hemos usado la hipótesis de inducción!

Notemos que en la sumatoria $k < i+1 \Rightarrow k \leq i$
Luego podemos usar la hipótesis inductiva tomando $s = k \leq i$. Así, en particular se tiene que:

$$B_{kj} = 0 \quad \forall j \in \{k+1, k+2, \dots, n\}$$

y como $k < i+1 \Rightarrow \{i+1, i+2, \dots, n\} \subseteq \{k+1, \dots, i+1, \dots, n\}$

$$\Rightarrow B_{kj} = 0 \quad \forall j \in \{i+1, \dots, n\} \qquad (\star)$$

$$\Rightarrow B_{kj} = 0 \quad \text{con } j = i+1$$

$\therefore \quad B_{h(i+1)} = 0 \qquad \forall h < i+1$

y por esto
$$\sum_{\substack{h=1 \\ h<i+1}}^{n} A_{(i+1)h} \cdot \underbrace{B_{h(i+1)}}_{=0 \ \forall h < i+1} = 0$$

luego
$$A_{(i+1)(i+1)} B_{(i+1)(i+1)} = 1$$

$\therefore$ obligatoriamente $A_{(i+1)(i+1)} \neq 0$ si A es invertible (ojo)

$$\Rightarrow \quad B_{(i+1)(i+1)} = A_{(i+1)(i+1)}^{-1}$$

- Solo hace falta ver ahora que: $B_{(i+1)j} = 0 \quad \forall j > i+1$

Denuevo, usemos notación por columnas por comodidad:

$$AB = I \iff AB_{\bullet j} = e_j \qquad \forall j$$

$$\Rightarrow AB_{\bullet j} = e_j \qquad \forall \underbrace{j > i+1}_{\text{Este es el caso relevante}}$$

Veamos la coordenada $i+1$ de $AB_{\bullet j}$

$$[(AB_{\bullet j})]_{i+1} = (e_j)_{i+1} = 0$$

pues $j > i+1 \Rightarrow j \neq i+1$, y recordemos que e_j es el vector con puros 0's salvo la coordenada j donde hay un 1.

$\therefore \quad [(AB_{\bullet j})]_{i+1} = 0$

Pero por otro lado:

$$[(AB_{\bullet j})]_{i+1} = \sum_{h=1}^{n} A_{(i+1)h} \cdot B_{hj}$$

$$= \left[\sum_{\substack{h=1 \\ h<i+1}}^{n} A_{(i+1)h} B_{hj}\right] + \underbrace{\left[\sum_{\substack{h=1 \\ h>i+1}}^{n} A_{(i+1)h} B_{hj}\right]}_{=0} + A_{(i+1)(i+1)} \cdot B_{(i+1)j}$$

$= 0$ pues A es Δ inferior $\Rightarrow A_{(i+1)h} = 0$ si $h > (i+1)$

$$= \left[\sum_{\substack{h=1 \\ h<i+1}}^{n} A_{(i+1)h} B_{hj}\right] + A_{(i+1)(i+1)} B_{(i+1)j}$$

Scanned by CamScanner

Luego como $[(AB_{\bullet j})_{i+1}]=0$ tenemos que:

$$\underbrace{\left[\sum_{\substack{h=1\\h<i+1}}^{n} A_{(i+1)h}\cdot B_{hj}\right]} + A_{(i+1)(i+1)}\, B_{(i+1)j} = 0$$

Si vemos que esto $=0$ estamos listos! ¿Como hacerlo? ¡hipótesis inductiva otra vez!

recordemos que por estrella (☆) :

$$B_{hj} = 0 \quad \forall\, j \geq i+1$$

$$\Rightarrow B_{hj} = 0 \quad \forall\, j > i+1$$

y recordemos que estamos viendo el caso $j > i+1$

$\Rightarrow B_{hj} = 0$ para todo los terminos de

$$\sum_{\substack{h=1\\h<i+1}}^{n} A_{(i+1)h}\cdot B_{hj}$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{h=1\\h<i+1}}^{n} A_{(i+1)h}\cdot B_{hj} = 0$$

finalmente: $A_{(i+1)(i+1)} B_{(i+1)j} = 0 \quad \forall j > i+1$

y como $A_{(i+1)(i+1)} \neq 0$ (ojo)

$\Rightarrow B_{(i+1)j} = 0 \quad \forall j > i+1$

$\blacksquare$

Punto propuestos Aux 1

P5

$\Leftarrow$ • Sea $X \in M_{nn}$ arbitraria

$$A X \underset{\text{hipótesis}}{=} \alpha I_n X \underset{\text{def. de identidad}}{=} \alpha X \underset{\text{def de identidad y escalar.}}{=} X \cdot \alpha I_n \underset{\text{hipótesis}}{=} X \cdot A$$

$\Rightarrow$ Lo haremos con matrices de suma!

Por ende elegimos $X = E_{pf}(\lambda)$

Con $\lambda = 1$ por simplicidad

Notar que:

• $$E_{pf}(1)\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{f1}+a_{p1} & \cdots & a_{fn}+a_{pn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \leftarrow \text{fila } f \qquad (F1)$$

Son =, por ende $a_{p1} = 0$

$$\begin{array}{c} \text{columna } p \end{array}$$

• $$A \cdot E_{pf}(1) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p}+a_{1f} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & \vdots & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{f1} & \cdots & a_{fp}+a_{ff} & \cdots & a_{fn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np}+a_{nf} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \leftarrow \text{fila } f \qquad (F2)$$

Pero la anterior es solo un dibujo, veamoslo formalmente. La idea es analizar la fila f de $E_{pf}(1)A$ para ver que los terminos $a_{pj} = 0$ $\forall j \neq p$ (pues queremos primero ver que los terminos fuera de la diagonal de A son 0). Calculemos $(E_{pf}(1)A)_{fj}$:

- $$(E_{pf}(1)A)_{fj} = \sum_{k=1}^{n} (E_{pf}(1))_{fk} \cdot (A)_{kj}$$

Pero notar que: $(E_{pf}(1))_{fk} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = p \\ 1 & \text{si } k = f \\ 0 & \text{si } k \neq f,\ k \neq p \end{cases}$

→ Por ser matriz de suma

→ en la diagonal

$$\Rightarrow (E_{pf}(1)A)_{fj} = \overbrace{(E_{pf}(1))_{fp}}^{1} A_{pj} + \overbrace{(E_{pf}(1))_{ff}}^{1} A_{fj}$$

$$= \underbrace{A_{pj} + A_{fj}}_{} \quad (\star)$$

justo como lo vimos en la figura (F1) los terminos de la fila f son de la forma $a_{pj} + a_{fj}$

Por otro lado:

- $$(A\, E_{pf}(1))_{fj} = \sum_{h=1}^{n} A_{fh} \cdot (E_{pf}(1))_{hj}$$

Pero recordemos que supusimos que $j \neq p$, es decir los terminos $(E_{pf}(1))_{hj}$ son los de una columna solo con un 1 (en $(E_{pf}(1))_{jj}$) y puros 0 !! (recorda que $E_{pf}(1)$ es una identidad con un 1 en la posicion (p,f) (fila f, columna p))

$$\therefore\ (E_{pf}(1))_{hj} = \begin{cases} 0 & \text{si } h \neq j \\ 1 & \text{si } h = j \end{cases}$$

Así:

$$(A\, E_{pf}(1))_{fj} = A_{fj} \cdot \underbrace{(E_{pf}(1))_{jj}}_{1} \overset{(*)}{=} A_{fj}$$

Ahora, usemos la hipotesis: $A\, E_{pf}(1) = E_{pf}(1)\, A$

$$\Rightarrow\ (A\, E_{pf}(1))_{fj} = (E_{pf}(1)\, A)_{fj}$$

$$\Rightarrow\ \overset{(*)}{A_{fj}} = A_{pj} + A_{fj} \ \Big\}\ (\star)$$

Scanned by CamScanner

Así, cancelando A_{fj} : $A_{pj} = 0$ con $j \neq p$

Pero p era arbitrario, y j también salvo $j \neq p$

$\Rightarrow$ $A_{pj} = 0 \quad \forall p \in \{1, \dots, n\}, \forall j \neq p \in \{1, \dots, n\}$

o sea, todos los términos de A son 0 salvo cuando $p = j$ o sea, en la diagonal! Luego, A es matriz diagonal.

Ahora falta ver que los términos de la diagonal son iguales. Siguiendo la indicación en U-cursos, usemos matrices de permutación I_{pf} :

$$I_{pf}A = \begin{array}{r} \\ \text{fila } p \rightarrow \\ \text{fila } f \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & 0 & \cdots & \boxed{a_f} \\ & a_p & \cdots & 0 \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \downarrow \\ \text{columna } p & \text{columna } f \end{array}$$

Dibujísticamente $a_f = a_p$ con p y f arbitrario

$$A I_{pf} = \begin{array}{r} \\ \text{fila } p \rightarrow \\ \text{fila } f \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & 0 & \cdots & \boxed{a_p} \\ & a_f & \cdots & 0 \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \downarrow \\ \text{columna } p & \text{columna } f \end{array}$$

Scanned by CamScanner

Veamoslo más formalmente, calculando $(I_{pf}A)_{pf}$ y $(AI_{pf})_{pf}$:

- $(I_{pf}A)_{pf} = \sum_{h=1}^{n} (I_{pf})_{ph} \cdot A_{hf}$

$$\underset{\downarrow}{=} A_{ff}$$

pues por def de matriz de permutación:

$$(I_{pf})_{ph} = \begin{cases} 1 & \text{si } h=f \\ 0 & \text{si } h \neq f \end{cases}$$

- $(AI_{pf})_{pf} = \sum_{h=1}^{n} A_{ph} \cdot (I_{pf})_{hf}$

$$\underset{\downarrow}{=} A_{pp}$$

Pues por def de matriz de permutación:

$$(I_{pf})_{hf} = \begin{cases} 1 & \text{si } h=p \\ 0 & \text{si } h \neq 0 \end{cases}$$

Luego usando que $XA = AX \quad \forall X$:

$$(I_{pf} A)_{pf} = (A I_{pf})_{pf}$$

$$\Leftrightarrow \quad A_{ff} = A_{pp}$$

y como p y f eran arbitrarios, podemos fijar $p = 1$

así: $\quad A_{11} = A_{ff} \quad \forall f$

si definimos $A_{11} =: \lambda$

$$\Rightarrow \quad \lambda = A_{ff} \quad \forall f$$

$\Rightarrow \quad A = \lambda I \qquad$ pues A era diagonal