MA1102-3: Álgebra Lineal
Profesor: Jaime San Martín
Auxiliar: Felipe Hernández Castro

Auxiliar 2 - Método de Gauss

1 de Octubre de 2018

Resumen

- [**Sistema compatible**]: Dado el sistema $Ax = b$, diremos que es compatible si existe al menos una solución.
- [**Propiedad 1**]: Dado el sistema $Ax = b$, sea $\tilde{A}$ un escalonamiento de A. Si $Ax = b$ es compatible y en $\tilde{A}$ existe un peldaño de largo mayor o igual a 2, entonces existen infinitas soluciones.
  Obs.: Si $A \in \mathcal{M}_{nm}$ con $n > m$, entonces el sistema tiene infinitas soluciones (pues como $n > m$ existen mas incógnitas que ecuaciones).
- [**Propiedad 2**]: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}$, entonces las proposiciones siguientes son equivalentes:
  1. A es invertible.
  2. $\forall b \in \mathbb{K}^n$, $Ax = b$ tiene solución única.
  3. $\prod_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ii} \neq 0$.
  4. $Ax = 0$ tiene solución única
- [**Propiedad 3**]: Una matriz triangular superior (inferior) es invertible si y sólo si todos sus elementos en la diagonal son no nulos.

P1. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\
x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & (3-\alpha)x_4 & = & \alpha \\
x_1 & + & x_2 & & & + & (\beta+\alpha+3)x_4 & = & \beta \\
x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 2(\alpha+\beta)
\end{array}$$

en las variables x_1,x_2,x_3, x_4, donde α , $\beta \in \mathbb{R}$ son parámetros.

a) Aplique el método de escalonamiento y determine los valores de α y β de modo que:

- I) El sistema tenga solución única.
- II) El sistema no tenga solución.
- III) El sistema tenga infinitas soluciones.

b) Para $\alpha = -2$ y $\beta = 2$ encuentre el conjunto solución.

P2. Encuentre la inversa de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

P3. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & \alpha \end{pmatrix}$$

Encuentre para que valor(es) de α la matriz A es invertible y encuentre la descomposición LDU de A.

P4. Encuentre la descomposicion LU:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ -1 & -4 & 0 \\ -1 & -8 & -9 \end{pmatrix}$$

Luego utilizando la descomposicion LU resuelva el sistema $Ax = b$ donde:

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Indicación: Considere el cambio de variable $y = Ux$, y resuelva primero el sistema $Ly = b$, luego resuelva el sistema $Ux = y$.

P5. Considere $A = \begin{pmatrix} -\alpha & 2 & 0 & 1 \\ \alpha & -3 & 2 & -1 \\ \alpha & -2 & -1 & 1 \\ 2\alpha & -2 & -4 & \beta \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ \alpha + \beta + 2 \end{pmatrix}$. Determine los valores de α, $\beta \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $Ax = b$, con $x \in \mathbb{R}^4$

a) Tiene solución única.

b) Tiene infinitas soluciones.

c) No tiene solución.

En caso de existir solución, encuéntrela.