Pauta Auxiliar - 1

P1

(a) A, B simetricas

P.D.Q. AB simetrica $\Leftrightarrow$ $AB = BA$

En efecto:

$\Rightarrow$] Como AB es simetrica $AB = (AB)^t = B^t \cdot A^t$

Pero $A = A^t$ y $B = B^t$ por ser A, B simetricas, luego

$B^t \cdot A^t = B\,A$ así: $AB = BA$ //

$\Leftarrow$] Usaremos nuevamente la simetria de A y B:

$$AB = BA \underset{\substack{\downarrow \\ A \text{ y } B \text{ simetricas}}}{=} B^t A^t = (AB)^t$$

$\therefore$ Como $AB = (AB)^t$, AB es simetrica ∎

(b) P.D.Q. A invertible $\Leftrightarrow$ $\exists k \in \mathbb{N} - \{0\}$, A^k es invertible.

En efecto:

$\Rightarrow$] Como A es invertible, existe A^{-1}. Luego $(A^{-1})^k$ es la inversa de A^k, esto $\forall k \geq 1$, en efecto:

$$A^k \cdot (A^{-1})^k = \overbrace{A \cdots A}^{k \text{ veces}} \cdot \overbrace{A^{-1} \cdots A^{-1}}^{k \text{ veces}} = I$$

Para ver que $(A^{-1})^k A^k = I$ es totalmente homologo.

Observación: Más formalmente, se puede ver por inducción:

Caso base: $k=1$ $\quad A \cdot A^{-1} = I$ trivialmente

hipotesis: $A^k \cdot (A^{-1})^k = I$

P.D.Q. $A^{k+1} \cdot (A^{-1})^{k+1} = I$

En efecto: $A^{k+1} \cdot (A^{-1})^{k+1} = A \cdot A^k \cdot (A^{-1})^k \cdot A^{-1}$

hipotesis inductiva $\leftarrow = A \cdot I \, A^{-1}$

$= A \cdot A^{-1} = I$

def. de I

$\Leftarrow$) Si A^k es invertible, $\exists B \in \mathcal{M}_{nn}$ t.q.:

$$A^k \cdot B = B A^k = I$$

Luego: $A \cdot (A^{k-1} \cdot B) = (B A^{k-1}) \cdot A = I$

$\therefore$ A es invertible con $A^{-1} = A^{k-1} \cdot B = B A^{k-1}$

con $B = (A^k)^{-1}$

¿Porque A^{k-1} y $(A^k)^{-1}$ conmutan?

$\rightarrow$ Esto es pues $(A^{-1})^k = (A^k)^{-1}$, esto se ve facilmente pues tanto $(A^{-1})^k$ como $(A^k)^{-1}$ son la inversa de A^k, y la inversa es unica.

Luego $A^{k-1} \cdot (A^k)^{-1} = A^{k-1} \cdot (A^{-1})^k = A^{-1} = (A^{-1})^k \cdot A^{k-1} = (A^k)^{-1} A^{k-1}$

(c) Supongamos que N es invertible, o sea, que existe N^{-1}. Además definimos:

$$A := \{ k \in \mathbb{N} \mid k \leq \bar{k} \wedge N^{k} = 0 \}$$

donde $\bar{k}$ es un entero tal que $N^{\bar{k}} = 0$, este existe pues N es nilpotente.

Notar que A es acotado ~~por 0~~ → inferiormente, y además es no vacío pues $\bar{k} \in A$, luego posee ínfimo, y en particular mínimo, pues es un conjunto finito. Llamemos α al mínimo.

Como N es invertible: $N \cdot N^{-1} = I$ $\quad / \; N^{\alpha} \cdot$

$$\Rightarrow \quad N^{\alpha} \cdot N^{-1} = N^{\alpha - 1}$$

Obs: Supusimos que $\alpha \neq 0$, de lo contrario $N^{0} = 0$ pero $N^{0} = I$ por definición $\rightarrow\!\leftarrow$

Como $\alpha \in A \Rightarrow N^{\alpha} = 0$, así: $0 = N^{\alpha - 1}$

luego $(\alpha - 1) \in A$, pero esto contradice el hecho que α es mínimo $\rightarrow\!\leftarrow$

(d) $A^3 + A^2 + A + I = 0$

P.D.Q. A es invertible

En efecto:

Por hipótesis: $A^3 + A^2 + A + I = 0$

$$\Rightarrow \quad I = -A^3 - A^2 - A$$

$$\Rightarrow \quad I = (-A^2 - A - I)A = A(-A^2 - A - I)$$

luego definiendo $A^{-1} = -A^2 - A - I$

tenemos que A es invertible pues $I = A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1}$

Pauta Auxiliar - 1

P2 $A, B \in M_{n,n}$ Δ- inferiores

a) P.D.Q. AB es Δ-inferior

En efecto: veamoslo por definición, calculemos $(AB)_{ij}$ para $i < j$:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik} \cdot (B)_{kj}$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ k \leq i}}^{n} (A)_{ik} \cdot (B)_{kj} + \sum_{\substack{k=1 \\ i < k}}^{n} (A)_{ik} \cdot (B)_{kj}$$

- Si $k \leq i < j \Rightarrow k < j$ luego $(B)_{kj} = 0$ pues B es Δ- inferior. Luego:

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \leq i}}^{n} (A)_{ik} \underbrace{(B)_{kj}}_{=0} = 0$$

- Si $i < k$ $(A)_{ik} = 0$ pues A es Δ-inferior $\therefore$:

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k > i}}^{n} \underbrace{(A)_{ik}}_{=0} \cdot (B)_{kj} = 0$$

Luego $(AB)_{ij} = 0$ con $i < j \Rightarrow AB$ es Δ- inferior

b) P.D.Q. $(AB)_{ii} = (BA)_{ii} \quad \forall i = 1 \dots n$

En efecto: Sea $i \in \{1, \dots, n\}$ arbitrario.

$$(AB)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{ki} = \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} a_{ik} \cdot b_{ki} \right) + a_{ii} \cdot b_{ii}$$

$((A)_{ik} := a_{ik} \,,\, (B)_{ki} := b_{ki})$

veamos que $\displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} a_{ik} \cdot b_{ki} = 0$, en efecto, si

$k < i$, tendremos que $b_{ki} = 0$ pues B es Δ-inferior. Por otro lado si $i < k$ $a_{ik} = 0$ pues A es Δ-inferior. Así, $\forall k \neq i$ $a_{ik} \cdot b_{ki} = 0$

Así:
$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} a_{ik} \cdot b_{ki} = 0$$

$\therefore (AB)_{ii} = a_{ii}\, b_{ii}$

Luego, intercambiando los roles de A y B (y haciendo el procedimiento idéntico):

$$(BA)_{ii} = b_{ii} \cdot a_{ii} = a_{ii} \cdot b_{ii} = (AB)_{ii} \quad \underbrace{\forall i = 1 \dots n}_{\text{pues } i \text{ era arbitrario}}$$

finalizando lo pedido

Pauta Auxiliar - 1

P3

A es de la forma: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

La idea es usar la siguiente propiedad:

A es invertible $\Leftrightarrow$ $Ax = b$ tiene solución única $\forall b \in \mathbb{R}^n$

Estudiemos el sistema $Ax = b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (1)$$

¿Cuanto vale x?

- $x_1 = b_1$ trivialmente.
- $x_2 = b_2 - x_1 = b_2 - b_1$ } usando lo anterior, el valor de x_1
- $x_3 = b_3 - x_2 - x_1 = b_3 - (b_2 - b_1) - b_1 = b_3 - b_2$

¿Será que $x_i = b_i - b_{i-1}$ $\forall i$?

Veamos!

definimos $b_0 := 0$

Por inducción:

Caso base

. $x_1 = b_1 = b_1 - 0 = b_1 - b_0$

hipótesis: $x_i = b_i - b_{i-1} \quad \forall i \in \{1, \dots, j\}$

P.D.Q. $x_{j+1} = b_{j+1} - b_j$

En efecto:

Por (1) sabemos que: $x_1 + x_2 + \dots + x_i + x_{i+1} = b_{i+1}$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{j+1} x_i = b_{j+1}$$

Por hipótesis:
$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{i} b_i - b_{i-1}}_{\text{Telescopico!}} + x_{j+1} = b_{j+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad b_i - \underbrace{b_0}_{=0} + x_{j+1} = b_{j+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{j+1} = b_{j+1} - b_i$$

//

$\therefore$ x se define de manera única como:

$$x = \begin{pmatrix} b_1 - b_0 \\ b_2 - b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n - b_{n-1} \end{pmatrix}$$

Con $b \in \mathbb{R}^n$ arbitrario, así

A es invertible

Scanned by CamScanner

Pauta Auxiliar - 1

P4

Si escribimos matricialmente el sistema obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ -1 & a-2 & 1 \\ 2 & 2 & a-2 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ a \end{pmatrix} \quad \text{con } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Cuya matriz expandida asociada es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ -1 & a-2 & 1 & b \\ 2 & 2 & a-2 & a \end{array}\right)$$

Escalonemos!

$$\xrightarrow[f_3' = f_3 - 2f_1]{f_2' = f_2 + f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & 2a-2 & 0 & b+1 \\ 0 & -2a+2 & a & a-2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3' = f_3 + f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & 2a-2 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & a & a+b-1 \end{array}\right)$$

Scanned by CamScanner

Siempre revisaremos primero los casos donde hay solución única pues estos solemos identificarlos:

a) Para que $\exists!$ solución, los pivotes tienen que ser no nulos, es decir:

$$2a-2 \neq 0 \quad , a \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{a \neq 1 \quad , a \neq 0} \quad (*)$$

$$(, b \in \mathbb{R})$$

Para explorar los otros casos, vemos que pasa si alguna de las condiciones $(*)$ no se cumple:

Caso 1 $a = 0$

En este caso la 3º fila nos dice:

$$0 = b-1$$

- Luego si $b \neq 1$, el sistema es incompatible, o sea no existe solución.

- Si $b = 1$ la tercera fila es compatible pero eso no nos asegura aún que exista solución. Así, debemos verificar las demás filas. (con x_3 variable libre)

fila 2: $-2x_2 = 2 \Rightarrow \boxed{x_2 = -1}$

fila 1: $x_1 - x_3 = 1 \Rightarrow \boxed{x_1 = 1 + x_3}$

Luego el sistema tiene ∞ soluciones dadas por:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 \\ x_3 \text{ libre} \end{cases}$$

Caso 2 | $a = 1$

Aquí:

fila 3 | $x_3 = b$ ✓ compatible $\forall b \in \mathbb{R}$

fila 2 | x_2 libre $\wedge$ $0 = b + 1$

- Luego si $b \neq -1$ el sistema es incompatible y por ende $\nexists$ solución.

- Si $b = -1$ x_2 queda libre y hay que ver si la fila 1 es compatible

fila 1 | $x_1 + x_2 - b = 1$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = 1 + b - x_2 = -x_2$$

Luego el sistema tiene ∞ soluciones dadas por:

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 \text{ libre} \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

En resumen:

- Sol. única si: $a \neq 0 \wedge a \neq 1 \wedge b \in \mathbb{R}$ cualquiera
- ∞ soluciones si: $(a = 0 \wedge b = 1) \vee (a = 1 \wedge b = -1)$
- $\nexists$ sol si: $(a = 0 \wedge b \neq 1) \vee (a = 1 \wedge b \neq -1)$