MA1102-3: Álgebra Lineal
Profesor: Jaime San Martín
Auxiliar: Felipe Hernández Castro

Auxiliar I - Matrices

24 de Septiembre de 2018

P1. (a) Sean A,$B \in \mathcal{M}_{nn}$ simétricas, demuestre que: AB es simétrica $\Leftrightarrow AB = BA$.

(b) Sea A matriz cuadrada de $n \times n$. Pruebe que A es invertible si y solo si A^k es invertible para algún $k \geq 1$.

(c) Sea $N \in \mathcal{M}_{nn}$. Diremos que N es nilpotente si $\exists k \in N$ tal que $N^k = 0$. ¿Puede N ser invertible?

(d) Pruebe que si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ verifica $A^3 + A^2 + A + I = 0$ entonces es invertible.

P2. Recordemos que una matriz A se dice triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$. Sean A, $B \in \mathcal{M}_{nn}$ matrices triangulares inferiores, demuestre que:

a) AB es triangular inferior.

b) $(AB)_{ii} = (BA)_{ii}$, $\forall i \in 1, \ldots, n$.

c) **Propuesto:** De existir, A^{-1} es triangular inferior y $(A^{-1})_{ii} = (A)_{ii}^{-1}$.

P3. Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}$ que cumple que:

$$(A)_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i \geq j \\ \\ 0 & si \quad i < j \end{cases}$$

Pruebe que A es invertible.

P4. Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcccccl} x_1 & + & ax_2 & - & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & (a-2)x_2 & + & x_3 & = & b \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & (a-2)x_3 & = & a \end{array}$$

Determine los valores o condiciones para los parámetros a y b de modo que el sistema:

a) Tiene solución única.

b) Tiene infinitas soluciones.

c) No tiene solución.

P5. Propuesto: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}$, demuestre que:

$$\forall X \in \mathcal{M}_{nn}, \quad AX = XA \Longleftrightarrow A = \alpha I_n, \text{ para algún } \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{constante.}$$

Resumen

- **[Producto de matrices]**: Dadas $A \in \mathcal{M}_{mr}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{rn}(\mathbb{K})$ se define el producto $C = AB$ como aquella matriz $C \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ tal que:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, ..., m, j = 1, ..., n.$$

- **[Notación: filas y columnas]** Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ notaremos su i-ésima fila como:

$$A_{i\bullet} = (a_{i1} a_{i2} \dots a_{in})$$

y su j-ésima columna:

$$A_{\bullet j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Podemos escribir entonces la matriz: $A = (A_{\bullet 1}, A_{\bullet 2}, \dots, A_{\bullet n})$ denominada notación por columnas. O bien:
$A = \begin{pmatrix} A_{1\bullet} \\ A_{2\bullet} \\ \vdots \\ A_{m\bullet} \end{pmatrix}$, correspondiente a la notación por filas.

- **[Matriz invertible]**: Diremos que $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ es **invertible** si y solo si $\exists B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ tal que:

$$AB = BA = I$$

De existir B, esta es **única**. Así, anotamos $B = A^{-1}$.

- **[Matriz traspuesta]** Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$, se define la matriz **traspuesta** de A como aquella matriz de $n \times m$ que denotaremos por A^t tal que $(A^t)_{ij} = (A)_{ji}$.

- **[Matriz simetrica]** Diremos que $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ es **simétrica** si y sólo si $A = A^t$.

- **[Matriz de permutación]**: Se define la matriz elemental de permutación I_{pq} como la matriz que se construye a partir de la identidad, permutando las filas p y q.

- **[Permutación de filas y columnas]**: Dada una matriz elemental de permutación $I_{pq} \in \mathcal{M}_{nn}$, $A \in \mathcal{M}_{nm}$ y $B \in \mathcal{M}_{sn}$ se tiene que:
  - $I_{pq}A$ corresponde a la matriz A con las filas p y q permutadas.
  - BI_{pq} corresponde a la matriz B con las columnas p y q permutadas.

- **[Matriz de suma]**: Se define la matriz elemental de suma $E_{p,q}(\lambda) \in \mathcal{M}_{nn}$ como la que se construye a partir de la identidad, agregando λ a la posición (q, p) (columna p y fila q).

- **[Suma y ponderación de filas]**: Dada una matriz elemental de suma $E_{p,q}(\lambda) \in \mathcal{M}_{nn}$ y una matriz $A \in \mathcal{M}_{nm}$ cualquiera, se tiene que:
  - Si $p < q$, $E_{p,q}(\lambda)A$ entrega la misma matriz A pero en la fila q, se le suma la fila p multiplicada por λ, es decir:

$$E_{p,q}(\lambda)A = \begin{pmatrix} A_{1\bullet} \\ \vdots \\ A_{p\bullet} \\ \vdots \\ A_{q\bullet} + \lambda A_{p\bullet} \\ \vdots \\ A_{n\bullet} \end{pmatrix}$$

  - Si $p = q$, $E_{p,p}(\lambda)A$ entrega la misma matriz A pero con la fila p ponderada por λ, es decir:

$$E_{p,p}(\lambda)A = \begin{pmatrix} A_{1\bullet} \\ \vdots \\ \lambda A_{p\bullet} \\ \vdots \\ A_{n\bullet} \end{pmatrix}$$

- **[Inversa de la matriz de suma]**: $E_{p,q}(\lambda)$ es **invertible**. Su inversa es $E_{p,q}(\lambda)^{-1} = E_{p,q}(-\lambda)$

- **[Propiedad importante]**: Dada una matriz C invertible, se tiene que $a \in \mathbb{K}^n$ es solución de $Ax = b$ $\iff$ a es solución de $(CA)x = Cb$.