Auxiliar 12

Diagonalización, Ortogonalidad y Matrices simétricas

P1 Sea W el subespacio vectorial de R^4 generado por:

$$\{(1,1,1,1)^t, (1,-1,1,-1)^t, (1,3,1,3)^t, (2,3,2,3)^t\}$$

a) Encuentre una base ortonormal de W y $W^\perp$

b) Encuentre la descomposición de $v = (1,2,3,4)$ en $W + W^\perp$

P2 Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Verifique que $(1,1,1,1)$ vector propio y calcule su valor propio.

b) Si se sabe que $\lambda = 4$ es valor propio de A, encuentre una base ortonormal de vectores propios de A.

c) Encuentre matrices P y D tal que $A = PDP^t$

P3 Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(R)$ simétrica. Demuestre que las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) Los únicos valores propios de A son $\lambda_1 = 1$, con $\alpha_A(1) = 1$ y $\lambda_2 = 0$ con $\alpha_A(0) = n - 1$

b) $A = uu^t$ para algún u $\in \mathbb{R}^n$, con $||u|| = 1$.

P4 **Propuesto** Se quiere resolver la siguiente recurrencia de números reales: $u_0 = u_1 = 0$ y $u_2 = 1$, $u_{n+3} = -2u_n + u_{n+1} + 2u_{n+1}$ Para ello definimos $x^n = (u_n, u_{n+1}, u_{n+2})^t$.

a) Calcule $A \in \mathcal{M}_{33}(R)$ tal que $x^{(n+1)} = Ax^{(n)}$ y demuestre que $x^{(n+1)} = A^{n+1}x^(0)$.

b) Usando lo anterior, calcule u_n para n > 3.