Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 - 1 Álgebra Lineal
14 de Noviembre de 2018

Taller de Resolución de Problemas #7

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliares: María Eugenia Martínez y Nicolás Zalduendo

P1. Considere $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definida por

$$T(p(x)) = 2p'(x) + \int_0^x 3p(x)dx$$

¿Es lineal?

- **Extensión:** ¿Es isomorfismo?

P2. Lineales biyectivas Sea $T : U \to V$ una transformación lineal con $\dim U < +\infty$. Si $\dim U = \dim V$ analice las siguientes equivalencias, ¿son todas ciertas?

$$T \text{ inyectiva} \iff T \text{ sobreyectiva} \iff T \text{ biyectiva.}$$

- **Extensión:** Si $\dim U < \dim V$, ¿puede T ser sobreyectiva?.
- **Extensión:** Pruebe que U es isomorfo a V si y sólo si $\dim U = \dim V$.

P3. ∗T vs T^2

Sea V un ev de dimensión n, y $T : V \longrightarrow V$ lineal.

Si $dim(Im(T)) = dim(Im(T^2))$, demostrar que

$$Im(T) \cap Ker(T) = \{0\}$$

.

- **Extensión:** Deducir que $V = Im(T) \oplus Ker(T)$
- **Extensión:** Demostrar que existe un entero positivo k tal que $V = Im(T^k) \oplus Ker(T^k)$

P4. Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal. Muestra que o bien T es sobreyectiva o es identicamente nula.

- **Extensión:** Muestre que existe $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\forall y \in \mathbb{R}^n,\ T(y) = \langle y, x\rangle$.

P5. Sea V un e.v. sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $L : V \to V$ una función lineal para la cual existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ y un punto $x_0 \in V$ tal que

$$L^n(x_0) = 0 \text{ y } L^{n-1}(x_0) \neq 0.$$

Demuestre que el conjunto $\{x_0, L(x_0), L^2(x_0), \ldots, L^{n-1}(x_0)\}$ es linealmente independiente

P6. Sean $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos funciones lineales. Demuestre que si $\operatorname{Ker} T \subseteq \operatorname{Ker} S$, entonces existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $S = \alpha T$.