

Taller de Resolución de Problemas #6

Profesora: Natacha Astromujoff

Auxiliares: María Eugenia Martínez y Nicolás Zalduendo

P1. Analice la veracidad de la siguiente afirmación:

Un espacio vectorial es dimensionalmente infinito si y solo si contiene un sub-conjunto infinito linealmente independiente.

■ **Extensión:** Use la afirmación anterior para analizar la veracidad de esta:

Si para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un s.e.v. de dimensión n , entonces el espacio es dimensionalmente infinito

■ **Extensión:** Pruebe que el espacio de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ tiene dimensión infinita.

P2. Sean U y W s.e.v's de un espacio vectorial V tal que

$$\dim(V) = 3,$$

$$\dim(U) = \dim(W) = 2,$$

$$U \neq W.$$

¿Cuál es la dimensión de $U \cap W$?

■ **Extensión:** ¿Y si sacamos la hipótesis $U \neq W$?

P3. Considere los espacios vectoriales

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1 = 0\},$$

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n | x_2 = \dots = x_n = 0\}$$

Considere $W = U + V$, ¿quién es W ?

■ **Extensión:** ¿Es la suma directa?

■ **Extensión:** ¿Se puede cambiar 0 por cualquier otro $\alpha \in \mathbb{R}$?

P4. Sea

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / x = y \right\},$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / x = -y \right\}.$$

Encuentre bases para U y W .

■ **Extensión:** Si $V = U + W$, ¿quién es V ?

■ **Extensión:** ¿Es la suma directa?

P5. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Pruebe que si U es un s.e.v de V , entonces existe W , otro s.e.v de V , tal que $U \oplus W = V$.