Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 - 1 Álgebra Lineal
21 de Noviembre de 2018

Clase Auxiliar # 9: Repaso control # 2

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliares: María Eugenia Martínez y Nicolás Zalduendo

P1. Sea $\mathcal{C}[0,1]$ el espacio vectorial de las funciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$, es decir,

$$\mathcal{C}[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua en } [0,1]\}.$$

Pruebe lo siguiente:

(a) Sea $n \in \mathbb{N}$ y $f \in \mathcal{C}[0,1]$ una función continua que toma al menos n valores distintos. Pruebe que el conjunto $\{f, f^2, \ldots, f^n\}$ es linealmente independiente, donde f^i corresponde al producto de i veces la función f.
Indicación: Utilice adecuadamente el siguiente resultado: La matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

es invertible si y sólo si <u>todos</u> los α_i son distintos.

(b) Sean

$$V_1 = \left\{ f \in \mathcal{C}[0,1] \mid \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \right\},$$
$$V_2 = \{f \in \mathcal{C}[0,1] \mid f \text{ es constante}\}.$$

Pruebe que $\mathcal{C}[0,1] = V_1 \oplus V_2$.

P2. Considere la transformación lineal $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que cumple:

$$\mathrm{Ker}(L) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(a) Encuentre L explícitamente.

(b) Encuentre una base de $\mathrm{Im}(L)$ y el rango de L.

(c) Estudie Inyectividad y Epiyectividad

P3. Considere el espacio vectorial $U = \langle 1, x, x^2 \rangle$ y la transformación lineal $T : U \to U$ que a cada polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in U$ le asocia

$$T(p)(x) = a_0 + a_1 + a_2 + (a_0 + a_1 - a_2)x + (a_0 - a_1 + a_2)x^2.$$

(a) Encuentre una matriz representante de T con respecto a la base canónica $\beta_U = \{1, x, x^2\}$ de U.

(b) Determine la matriz de pasaje de la base β_U a la base $\beta'_U = \{x(x-1), x(x+1), (1-x)\}$.

(c) Encuentre la matriz representante de T con respecto a la base β'_U.